РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА
NEW ECONOMIC SCHOOL

Г.В. Колесник

ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ»

КЛ/2006/016

Москва

Россия, 117418 Москва, Нахимовский проспект 47.
Suite 1721, Nakhimovsky Prospect 47., 117418 Moscow, Russia.
tel (7)(095) 129-3844 or 129-3722 fax (7)(095) 129-3722 E-mail: nes@nes.cemi.rssi.ru

Российская экономическая школа

Колесник Г.В.

Практикум по дисциплине «Математика для экономистов»

МОСКВА 2006

Колесник Г.В.
Практикум по дисциплине «Математика для экономистов» – М.: Российская экономическая школа, 2006. – 91 с.

Содержит материалы практических занятий по дисциплине «Математика для экономистов» и упражнения для самостоятельной работы.
Предназначен для студентов и преподавателей.

Kolesnik G.V.
Practical guide on mathematics for economists – M.: New Economic School, 2006. – 91 p.

The guide contains examples and problems which cover the major topics of the NES course «Mathematics for economists». Intended for the students and assistants.

Рецензент:

доктор физико-математических наук, профессор
Булавский В.А.

Оглавление

Тема 1. Дифференциальные уравнения

1. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Однородные системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему вида:

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Пусть h – собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$, отвечающий некоторому собственному значению λ, т.е. выполнено

$$\boldsymbol{A}h = \lambda h.$$

В этом случае $x(t) = he^{\lambda t}$ есть решение системы (1), что может быть получено подстановкой.

Случай простых корней. Рассмотрим ситуацию, когда все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, и h_i – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i. Положим

$$x_i(t) = h_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Набор функций $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) системы (1).

Тогда любое решение $x(t)$ системы (1) может быть задано выражением

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t), \tag{2}$$

где c_i – произвольные постоянные (в общем случае комплексные).

При этом решение $x(t)$ является действительным тогда и только тогда, когда константы c_i при действительных решениях $x_i(t)$ действительны, а при комплексно-сопряженных решениях – являются комплексно-сопряженными.

З а д а ч а 1 . Найти общее решение системы уравнений

$$\dot{x} = 4x - y,$$
$$\dot{y} = 5x + 2y. \tag{3}$$

Р е ш е н и е .

1. Найдем корни характеристического многочлена:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 3 \pm 2i.$$

2. Собственные векторы, соответствующие данным собственным значениям:

$\lambda_1 = 3 + 2i$: $$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 1,\ h_2 = 1 - 2i.$$

Отсюда $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1 - 2i)\, e^{(3+2i)t}$, где $e^{(3+2i)t} = e^{3t}\,(\cos 2t + i \sin 2t)$.

Выделим два линейно независимых действительных решения, соответствующих полученной паре комплексно-сопряженных корней:

$$x_1 = \operatorname{Re} x = e^{3t}\cos 2t, \qquad y_1 = \operatorname{Re} y = e^{3t}\,(\cos 2t + 2\sin 2t);$$
$$x_2 = \operatorname{Im} x = e^{3t}\sin 2t, \qquad y_2 = \operatorname{Im} y = e^{3t}\,(-2\cos 2t + \sin 2t).$$

Тогда общее решение системы (3)

$$x = e^{3t}\,(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t),$$
$$y = e^{3t}\,((c_1 - 2c_2)\cos 2t + (2c_1 + c_2)\sin 2t). \ \blacksquare$$

Случай кратных корней. Предположим теперь, что матрица $\boldsymbol{A}$ имеет $l \le n$ вещественных собственных значений λ_i кратности k_i.

Рассмотрим ситуацию, когда все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$ имеют геометрическую кратность 1. В этом случае с каждым собственным числом λ_i может быть связана *серия*, т.е. последовательность векторов $h_1, \ldots, h_{k_i}$, таких, что

$$\boldsymbol{A}h_1 = \lambda h_1, \quad \boldsymbol{A}h_2 = \lambda h_2 + h_1, \ \ldots, \quad \boldsymbol{A}h_{k_i} = \lambda h_{k_i} + h_{k_i - 1}.$$

Первым вектором в серии является собственный вектор, соответствующий значению λ_i. Остальные вектора, называемые *присоединенными*, получаются как решения неоднородных систем с правыми частями, равными предыдущему вектору в серии.

Совокупность серий для всех собственных чисел матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\underbrace{h_1,\ \ldots,\ h_{k_1}}_{\lambda_1},\ \underbrace{h_{k_1+1},\ \ldots,\ h_{k_1+k_2}}_{\lambda_2},\ \underbrace{\ldots}_{\ldots},\ h_n.$$

образует базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, если все λ_i – вещественные. Сопоставим каждой серии набор решений системы (1):

$$x_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t},\ x_2(t) = (th_1 + h_2)\,e^{\lambda_1 t},\ \ \ldots,\ \ x_{k_1}(t) = \left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}h_1 + \ldots + h_{k_1}\right)e^{\lambda_1 t},$$

$$x_{k_1+1}(t) = h_{k_1+1}e^{\lambda_2 t},\quad x_{k_1+2}(t) = (th_{k_1+1} + h_{k_1+2})\,e^{\lambda_2 t},\ \ldots,$$

$$x_{k_1+k_2}(t) = \left(\frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!}h_{k_1+1} + \ldots + h_{k_1+k_2}\right)e^{\lambda_2 t},\quad \ldots\ .$$

Этот набор представляет собой фундаментальную систему решений рассматриваемой системы, и ее общее решение вновь определяется по формуле (2).

З а д а ч а 2 . Найти общее решение системы уравнений

$$\dot{x} = 2x + y + z\,,$$
$$\dot{y} = -2x - z\,,$$
$$\dot{z} = 2x + y + 2z\,.$$

Р е ш е н и е .

1. Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1.$$

2. Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 = -\,\alpha_2 = \alpha_3,$$

Положим $h_1 = (1, -2, 2)'$, тогда $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = -2e^{2t}$, $z_1 = 2e^{2t}$.

Для кратного корня $\lambda_{2,3} = 1$ найдем соответствующую серию:

$$h_2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = (0, 1, -1).$$

Присоединенный вектор h_3: $\boldsymbol{A}h_3 = \lambda_2 h_3 + h_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = ½ \quad \Rightarrow \quad h_3 = (-1, ½, ½).$$

Соответствующие h_2 и h_3 решения имеют вид

$$\overline{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \overline{x}_3(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) e^t .$$

Общее решение $\overline{x}(t) = c_1\overline{x}_1(t) + c_2\overline{x}_2(t) + c_3\overline{x}_3(t)$. ■

Метод неопределенных коэффициентов. В общем случае, когда собственные числа матрицы $\boldsymbol{A}$ имеют геометрическую кратность, большую 1, каждому из них может соответствовать более одной серии. При этом могут возникать трудности с их определением. В этом случае для нахождения общего решения системы можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим ситуацию, когда корень характеристического уравнения λ имеет кратность k. Определим максимальное число m линейно-независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ следующим образом: если порядок системы n, а $\operatorname{rank}(A - \lambda E) = r$, то $m = n - r$.

Тогда решения, соответствующие собственному значению λ, могут быть найдены как многочлены степени $(k - m)$, умноженные на величину $e^{\lambda t}$:

$$x_1(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_{k-m}\, t^{k-m})\, e^{\lambda t},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_k(t) = (p_0 + p_1 t + \ldots + p_{k-m}\, t^{k-m})\, e^{\lambda t}.$$

Найти коэффициенты многочленов можно, подставив полученные частные решения в исходную систему и приравняв коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях.

З а д а ч а 3 . Найти общее решение системы уравнений

$$\dot{x} = 4x - y\,,$$

$$\dot{y} = x + 2y\,,$$

Р е ш е н и е .

1. Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,\,2} = 3 \text{ – корень кратности } k = 2;$$

$$r = \operatorname{rank}(A - \lambda E) = 1;$$

$$m = n - r = 1 < k = 2.$$

Ищем общее решение в виде:

$$x(t) = (c_1 t + c_2)e^{3t}, \quad y(t) = (d_1 t + d_2)e^{3t}.$$

Подставляя его в исходную систему, получаем

$$3(c_1 t + c_2) + c_1 = 4(c_1 t + c_2) - d_1 t - d_2,$$

$$3(d_1 t + d_2) + d_1 = c_1 t + c_2 + 2(d_1 t + d_2),$$

откуда $d_1 = c_1$, $d_2 = c_2 - c_1$.

Тогда общее решение запишется как

$$x(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{3t}, \quad y(t) = (c_1 t + (c_2 - c_1))\, e^{3t}. \qquad (4)$$

В данном случае собственное значение имеет геометрическую кратность 1, в связи с чем для нахождения общего решения может использоваться метод выделения серий. Покажем, что он приводит к такому же результату. Найдем h_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{положим } h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определим присоединенный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{положим } h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид:

$$\bar{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \bar{x}_2(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$$

Общее решение:

$$\bar{x}(t) = D_1 \bar{x}_1(t) + D_2 \bar{x}_2(t) = \left(\begin{pmatrix} D_1 + 2D_2 \\ D_1 + D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} t \right) e^{3t}.$$

Полагая $c_1 = D_2$, $c_2 = D_1 + 2D_2$, вновь получим решение в виде (4). ■

Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим неоднородную систему вида

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x + f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (5)$$

Общий метод решения такой системы – *метод вариации произвольных постоянных*.

Пусть $\varphi^1(t)$, …, $\varphi^n(t)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\dot{y} = \boldsymbol{A}y,$$

то есть, n частных решений с линейно-независимыми начальными векторами.

Будем искать решение системы (5) в виде разложения по базису $\{\varphi^i\}$ с переменными во времени коэффициентами:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi^i(t).$$

Подставляя его в (5), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\varphi^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\dot{\varphi}^i(t) = \boldsymbol{A}\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi^i(t) + f(t).$$

Так как $\forall i$ $\varphi^i(t)$ – решение соответствующей однородной системы, то получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\varphi^i(t) = f(t).$$

Это алгебраическая система относительно $\dot{c}_i(t)$. Она является разрешимой, так как $\{\varphi^i\}$ – линейно независимы. Далее интегрированием определяются $c_i(t)$.

Рассмотрим частный случай, когда функции $f_i(t)$ в правых частях системы (5) имеют вид

$$f_i(t) = P_i(t)\, e^{\gamma t},$$

где $P_i(t)$ – многочлен степени m_i, γ – в общем случае, комплексное число.

Частное решение системы ищется в виде

$$x_i(t) = Q_i(t)\, e^{\gamma t}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $Q_i(t)$ – многочлен степени $(m + s)$, $m = \max_i\{m_i\}$, s – кратность γ, если оно является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A}$ и $s = 0$ в противном случае.

Если неоднородность $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = h\, P(t)\, e^{\gamma t},$$

где γ – собственное число матрицы $\boldsymbol{A}$ кратности s, h – собственный вектор, соответствующий собственному числу γ, $P(t)$ – многочлен степени m, то частное решение $x(t)$ естественно искать в виде:

$$x(t) = h\,Q(t)\,e^{\gamma t},$$

где $Q(t) = \int P(t)dt$.

Задача 4. Найти общее решение системы уравнений

$$\dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1},$$
$$\dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}.$$

Решение. Найдем решение системы с использованием метода вариации произвольных постоянных. Для этого рассмотрим однородную систему:

$$\dot{x} = -4x - 2y,$$
$$\dot{y} = 6x + 3y.$$

Общее решение данной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Теперь предположим, что $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$ и подставим получившееся решение в исходную систему:

$$\dot{x} = \dot{c}_1 - 2c_2e^{-t} + 2\dot{c}_2e^{-t} = -2c_2e^{-t} + \frac{2}{e^t - 1},$$
$$\dot{y} = -2\dot{c}_1 + 3c_2e^{-t} - 3\dot{c}_2e^{-t} = 3c_2e^{-t} - \frac{3}{e^t - 1}.$$

Введем обозначения: $\xi = \dot{c}_1$, $\eta = \dot{c}_2e^{-t}$, $a = \dfrac{1}{e^t - 1}$. Тогда система сведется к виду

$$\xi + 2\eta = 2a,$$
$$-2\xi - 3\eta = -3a.$$

Решение данной системы $\xi = 0$, $\eta = a$. Тогда

$$\dot{c}_1 = \xi = 0, \qquad \dot{c}_2 = \eta e^t = \frac{e^t}{e^t - 1}.$$

Отсюда

$$c_1 = D = \text{const}, \qquad c_2 = \int \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \ln|e^t - 1| + F.$$

Подставляя найденные функции c_1 и c_2 в общее решение однородной системы, окончательно получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \ln|e^t - 1|\, e^{-t}.$$

Упражнения

1. Найти общие решения следующих систем линейных дифференциальных уравнений:

a) $\dot{x} = 2x + y$
$\dot{y} = x + 3y - z$
$\dot{z} = 2y + 3z - x$

b) $\dot{x} = y - 2z - x$
$\dot{y} = 4x + y$
$\dot{z} = 2x + y - z$

c) $\dot{x} = 4x - y$
$\dot{y} = 3x + y - z$
$\dot{z} = x + z$

2. Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x + 5\cos t \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}.$$

2. Непрерывность и дифференцируемость решения дифференциального уравнения по параметру

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu), \tag{1}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр, $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть известно решение системы (1) $x(t, \mu_0)$, соответствующее некоторому значению параметра $\mu = \mu_0$. Исследуем, каким образом будет изменяться поведение системы при малых отклонениях параметра от μ_0.

Предположим, что в некоторой области D переменных (t, x, μ) функции f и a непрерывно дифференцируемы по t, x, μ, и решение $x(t, \mu_0)$ определено на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда функция $x(t, \mu_0)$ дифференцируема по μ на $[t_0, t_1] \times U(\mu_0)$, где $U(\mu_0)$ – некоторая открытая окрестность значения μ_0, такая, что решение (1) при $\mu \in U(\mu_0)$ существует и лежит в D. При этом вектор-функция $\overline{x}(t) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t, \mu_0), \quad ..., \frac{\partial x_n}{\partial \mu}(t, \mu_0) \right)$ (как функция t) удовлетворяет *системе уравнений в вариациях*:

$$\dot{\overline{x}}(t) = f_x^{/}(t, x(t, \mu_0), \mu_0)\overline{x} + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t, \mu_0), \mu_0), \tag{2}$$

при начальном условии

$$\overline{x}(t_0) = \frac{\partial a}{\partial \mu}(\mu_0),$$

где

$$f_x^{/} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Система (2) – неоднородная линейная (по $\overline{x}$) система с, вообще говоря, переменными во времени коэффициентами, которая может быть записана в общем виде как

$$\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x} + g(t)\,. \qquad (3)$$

В простейшем случае, когда матрица системы A не зависит от времени, для ее решения можно воспользоваться рассмотренным выше методом вариации произвольной постоянной.

Решения системы в вариациях описывают в первом приближении отклонения траекторий системы $x(t, \mu)$ при малых изменениях параметра в окрестности значения μ_0. При сделанных выше предположениях данные траектории можно приближенно представить в виде следующего разложения

$$x(t, \mu) = x(t, \mu_0) + \overline{x}(t)\,(\mu - \mu_0) + o(\mu - \mu_0).$$

Таким образом, зная решение системы в вариациях, можно приближенно восстановить решения исходной системы (1) при различных значениях параметра μ, не решая ее в общем виде.

З а д а ч а 1 . Для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x} &= 2x + 4y - 3z + y\mu e^{-2t}\,,\\
\dot{y} &= -3x + 13y - 7z + \frac{2xy\mu}{z}\frac{t-1}{t+2}e^{-2t} + \mu^3(x^3 + y^2 - 2z^3)\cos 3t\,,\\
\dot{z} &= -5x + 16y - 8z + 3t\mu\frac{x^2}{(2+t)^2}e^{-5t} + \mu^2(x^2 - z^4)\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$x(0, \mu) = 2, \quad y(0, \mu) = 0, \quad z(0, \mu) = -1,$$

найти $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$.

Р е ш е н и е .

1. Найдем решения системы (4) при $\mu = 0$. Заметим, что в этом случае система совпадает с однородной системой уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{x}} &= 2\overline{x} + 4\overline{y} - 3\overline{z}\,,\\
\dot{\overline{y}} &= -3\overline{x} + 13\overline{y} - 7\overline{z}\,,\\
\dot{\overline{z}} &= -5\overline{x} + 16\overline{y} - 8\overline{z}\,.
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -3 \\ -3 & 13-\lambda & -7 \\ -5 & 16 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0, \qquad (5)$$

его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 3$.

Определим собственные вектора A. Для $\lambda_1 = 1$ имеем систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -3 & 12 & -7 \\ -5 & 16 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $h_1 = (1, 2, 3)'\ c$, где c – произвольная постоянная (далее будем полагать $c = 1$).

Для случая $\lambda_{2,3} = 3$ система для определения собственного вектора запишется как

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -3 & 10 & -7 \\ -5 & 16 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $h_2 = (1, 1, 1)'$.

Найдем присоединенный вектор:

$$Ah_3 = 3h_3 + h_2,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -3 & 10 & -7 \\ -5 & 16 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы имеет вид $a_2 = a_3 + 1$, $a_1 = a_2 + 2$. Полагая $a_3 = -1$, получим окончательно $h_3 = (2, 0, -1)'$.

Тогда общее решение системы при $\mu = 0$, и оно же – решение однородной системы в вариациях запишется

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t} .$$

Найдем константы c_i, соответствующие начальным условиям задачи:

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 2,$$
$$2c_1 + c_2 = 0,$$
$$3c_1 + c_2 - c_3 = -1,$$

откуда $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Таким образом, решение системы (4), соответствующее $\mu = 0$ и заданным начальным условиям, есть

$$x(t) = (2 + t)\, e^{3t},$$
$$y(t) = t\, e^{3t},$$
$$z(t) = (t - 1)\, e^{3t}.$$

2. Определим решение системы уравнений в вариациях. При подстановке в (2) найденных выше функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ она будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}} &= 2\overline{x} + 4\overline{y} - 3\overline{z} + te^t , \\ \dot{\overline{y}} &= -3\overline{x} + 13\overline{y} - 7\overline{z} + 2te^t , \\ \dot{\overline{z}} &= -5\overline{x} + 16\overline{y} - 8\overline{z} + 3te^t , \\ \overline{x}(0) &= \overline{y}(0) = \overline{z}(0) = 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

Систему (6) можно переписать как

$$\dot{\overline{u}} = A\overline{u} + h_1 te^{\lambda_1 t} , \quad \overline{u}(0) = 0 ,$$

где $\lambda_1 = 1$ – простой корень характеристического уравнения (5), а $h_1 = (1, 2, 3)'$ – соответствующий ему собственный вектор. Тогда будем искать частное решение этой системы в форме

$$\overline{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^t (c' t^2 + c'' t + c''') = h_1 e^t\, C(t).$$

Подставляя его в (6), получим

$$h_1\, C(t) + h_1\, (2c't + c'') = C(t)\, Ah_1 + h_1 t,$$

откуда $c' = ½$, $c'' = c''' = 0$.

Следовательно, частное решение системы будет иметь вид

$$\overline{u} = \frac{t^2}{2} h_1 e^t .$$

Общее решение системы уравнений в вариациях

$$\overline{u} = \frac{t^2}{2} h_1 e^t + c_1 h_1 e^t + c_2 h_2 e^{3t} + c_3 (th_2 + h_3) e^{3t} .$$

Найдем константы c_1, c_2 и c_3, соответствующие начальным условиям $\overline{x}(0) = \overline{y}(0) = \overline{z}(0) = 0$:

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 0,$$
$$2c_1 + c_2 = 0,$$
$$3c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

откуда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Таким образом, решение данной задачи имеет вид

$$\frac{\partial x(t,0)}{\partial \mu} = \frac{t^2}{2} e^t , \ \frac{\partial y(t,0)}{\partial \mu} = t^2 e^t , \ \frac{\partial z(t,0)}{\partial \mu} = \frac{3}{2} t^2 e^t . \ \blacksquare$$

З а д а ч а 2 . Доказать, что решение уравнения

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = b$, имеет положительную производную по начальному условию на промежутке существования решения, если $f_x{}' \geq 0$.

Р е ш е н и е .

Приведем уравнение к системе 1 порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2),$$
$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = b.$$

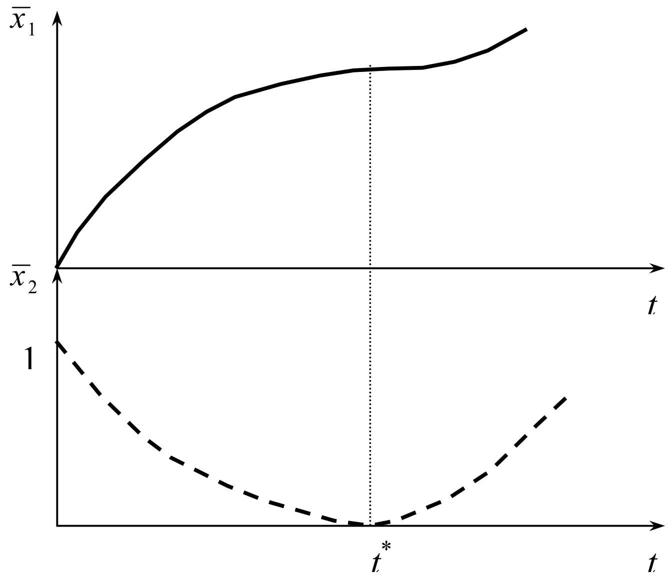


Рис. 1.

Требуется доказать, что $\bar{x}_1 = \dfrac{\partial x_1(t,b)}{\partial b} > 0$ при $t > 0$.

Уравнения в вариациях относительно решения ($x_1(t, b)$, $x_2(t, b)$) имеют вид

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2,$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = f^{/}_{x_1}(t, x_1(t,b), x_2(t,b))\bar{x}_1 + f^{/}_{x_2}(t, x_1(t,b), x_2(t,b))\bar{x}_2,$$

$$\bar{x}_1(0) = 0,\ \bar{x}_2(0) = 1.$$

По условию, $f^{/}_{x_1} \geq 0$, поэтому $f^{/}_{x_1}\bar{x}_1 \geq 0$, пока $\bar{x}_1 \geq 0$. Так как $\bar{x}_2(0) = 1$, то $\bar{x}_1$ возрастает, по крайней мере, при малых t. Следовательно, на некотором интервале (0, τ) $\bar{x}_1 > 0$.

С другой стороны, $\bar{x}_1$ – неубывающая. Действительно, если в некоторый момент времени t^* $\dot{\bar{x}}_1(t^*) = \bar{x}_2(t^*) = 0$, то $\dot{\bar{x}}_2(t^*) \geq 0$. Поэтому $\bar{x}_2$ остается неотрицательным, а следовательно, $\bar{x}_1$ – не убывает (рис. 1). Отсюда получаем, что $\bar{x}_1 > 0$ на всем промежутке существования решения.

Более строгое рассуждение. Рассмотрим $\overline{y}$ такое, что

$$\dot{\overline{y}} = f^{/}_{x_2}(t, x_1(t,b), x_2(t,b))\overline{y}\,, \quad \overline{y}\,(0) = 1.$$

Тогда

$$\overline{x}_2\,(t) \geq \overline{y}\,(t) = \exp(\int\limits_0^t f^{/}_{x_2}(\tau, x_1, x_2)d\tau) > 0.$$

Следовательно, так как $\dot{\overline{x}}_1 = \overline{x}_2$, то $\overline{x}_1$ не убывает, и даже возрастает, пока $\overline{x}_2 > 0$. Следовательно, $\overline{x}_1$ всюду возрастает. ■

Упражнения

1. Найти $\left.\dfrac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$, $\left.\dfrac{\partial x_2(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$, $\left.\dfrac{\partial x_3(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

a) $\dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + \sin(\mu(x_2 - x_1))$;

$\dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 + \sin(\mu(x_3 - x_1))$;

$\dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - 4x_2 + 5x_3 + \dfrac{1}{3}\sin(\mu(2x_3 - x_1 - x_2))$;

с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 3$.

b) $\dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 3x_2 - x_3 + \mu x_3^2 e^{4t}$;

$\dfrac{dx_2}{dt} = -5x_1 + 5x_2 - x_3 + 2\mu t^2(x_2 - x_3)^2 e^{4t} + \mu^3(x_1^3 x_2^2 - 5x_3^3)\sin 3t$;

$\dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + \mu x_3^2(x_1 - x_3)^3 e^{7t} + \mu^2(x_2^2 - x_1 x_3^4)$;

с начальными условиями $x_1(0) = 1 - \mu$, $x_2(0) = 1 - 2\mu$, $x_3(0) = -\mu + \mu^2$.

c) $\dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_3 + \mu x_2^2 e^{3t}$;

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \mu(x_1 - x_3)^2;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + \mu \frac{1 - x_1}{(1 + x_3)x_2};$$

с начальными условиями $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$.

3. Асимптотическая устойчивость решений дифференциальных уравнений

Пусть задана система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \geq 0, \qquad (1)$$

и функция $\varphi(t)$ является ее решением на полуинтервале $[0, +\infty)$ при начальном условии $\varphi(0) = \varphi_0$.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что решение системы (1) $\varphi(t)$ *устойчиво (по Ляпунову)*, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: все решения (1), удовлетворяющие условию $|\ \psi(0) - \varphi_0\ | < \delta$, существуют на полуинтервале $[0, +\infty)$, и для них выполнено

$$|\ \varphi(t) - \psi(t)\ | < \varepsilon, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Говорят, что $\varphi(t)$ *асимптотически устойчиво*, если дополнительно

$$|\ \varphi(t) - \psi(t)\ | \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

При помощи замены переменных $y(t) = x(t) - \varphi(t)$ исследование устойчивости произвольного решения $\varphi(t)$ можно свести к вопросу устойчивости решения $y(t) \equiv 0$.

Анализ устойчивости решения $\varphi(t)$ основан на исследовании свойств *линеаризованной системы*

$$\dot{y} = f_x^{/}(\varphi(t))y + \mathrm{o}(|\ y\ |).$$

Т е о р е м а П е р р о н а . Пусть

$$\dot{y} = Ay + F(t, y), \qquad (2)$$

где A – действительная постоянная матрица, собственные числа которой имеют отрицательные действительные части, $F(t, y) = o(\,|\,y\,|\,)$ равномерно по $t \geq 0$.

Тогда решение $y(t) \equiv 0$ системы (2) асимптотически устойчиво.

Условия, обеспечивающие отрицательность вещественных частей корней

Т е о р е м а С т о д о л а . Для того, чтобы полином

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

имел все корни с отрицательной вещественной частью, необходимо, чтобы все $a_i > 0$.

При $n = 2$ это условие является достаточным (следует из теоремы Виета). При $n \geq 3$ оно в общем случае не является достаточным.

К р и т е р и й Р а у с а – Г у р в и ц а .

Полином

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

имеет все корни с отрицательной вещественной частью, тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры *матрицы Гурвица* положительны:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & a_{-1} & \ldots & a_{2-n} \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & a_{4-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_r = 0$, если $r < 0$ или $r > n$.

З а д а ч а 1 . Определить область значений параметров a и b, при которых нулевое решение системы асимптотически устойчиво

$$\dot{x} = x^2 - xz^3 + \sin y - u \sin bu\,,$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} = xy + e^{z} + u - e^{u}, \\
&\dot{z} = xze^{y} + \frac{\sin u}{\cos u}, \qquad\qquad\qquad\qquad (3)\\
&\dot{u} = e^{-4x} - \sin by - \frac{\sin 5z}{\cos 5z} - e^{au}.
\end{aligned}
$$

Р е ш е н и е .

Составим линеаризованную систему уравнений относительно решения $x = y = z = u \equiv 0$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\overline{x}} = (2x - z^{3})\overline{x} - \cos y\,\overline{y} + 3xz^{2}\overline{z} + (\sin bu + bu\cos bu)\overline{u}, \\
&\dot{\overline{y}} = y\overline{x} + x\overline{y} + e^{z}\overline{z} + (1 - e^{u})\overline{u}, \\
&\dot{\overline{z}} = ze^{y}\overline{x} + xze^{y}\overline{y} + xe^{y}\overline{z} + \frac{\cos^{2} u + \sin^{2} u}{\cos^{2} u}\overline{u}, \\
&\dot{\overline{u}} = -4e^{-4x}\overline{x} - b\cos by\quad \overline{y} - 5\frac{\cos^{2} 5z + \sin^{2} 5z}{\cos^{2} 5z}\overline{z} - ae^{au}\overline{u}.
\end{aligned}
$$

Подставляя в нее нулевое решение исходной системы, получим

$$
\begin{aligned}
&\dot{\overline{x}} = \overline{y}, \\
&\dot{\overline{y}} = \overline{z}, \\
&\dot{\overline{z}} = \overline{u}, \\
&\dot{\overline{u}} = -4\overline{x} - b\quad \overline{y} - 5\overline{z} - a\overline{u}.
\end{aligned}
$$

Это система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матрица данной системы имеет вид:

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -b & -5 & -a \end{pmatrix}.
$$

Ее характеристический многочлен:

$$
\lambda^{4} + a\lambda^{3} + 5\lambda^{2} + b\lambda + 4 = 0,
$$

его коэффициенты $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = 5$, $a_3 = b$, $a_4 = 4$.

Тогда необходимым условием устойчивости согласно теореме Стодола, является

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Определим теперь достаточные условия асимптотической устойчивости.

Матрица Гурвица характеристического многочлена системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 5 & a & 1 \\ 0 & 4 & b & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Из условий положительности ее главных миноров получаем следующие соотношения:

$$5a > b,$$
$$b(5a - b) - 4a^2 = -4a^2 + 5ab - b^2 > 0.$$

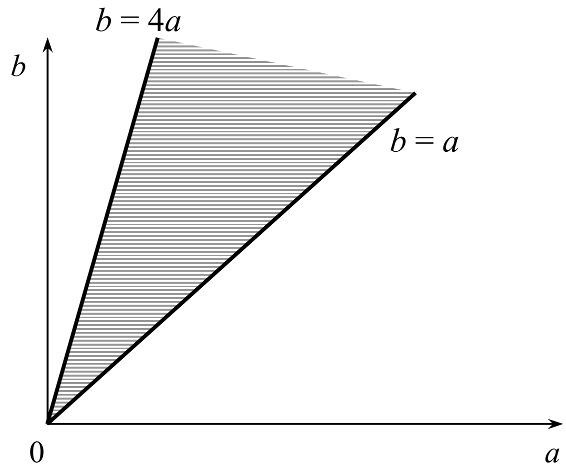


Рис. 2.

Решая последнее неравенство относительно b, получаем

$$a \le b \le 4a.$$

Таким образом, нулевое решение системы (3) будет асимптотически устойчиво в области параметров

$$\{\, a \le b \le 4a,\ a > 0 \,\}.$$

Данная область приведена на рис. 2. ■

Орбитальная асимптотическая устойчивость

Рассмотрим теперь случай, когда дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \qquad t \ge 0, \tag{4}$$

имеет периодическое решение $\varphi(t)$ (не константу) с периодом τ

$$\varphi(t) = \varphi(t + \tau).$$

В этом случае будем говорить об орбитальной асимптотической устойчивости, понимая под этим следующее. Обозначим через G *орбиту решения* $\varphi(t)$, т.е. $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(t)$ для некоторого $t\}$. Скажем, что решение $\varphi(t)$ асимптотически орбитально устойчиво, если $\exists\ \delta > 0$: $\forall\ \psi(t)$ – решения (4), такого, что $|\ \varphi(0) - \psi(0)\ | < \delta$, выполнено

$$\lim_{t\to\infty} \rho(\psi(t), G) = 0,$$

где через $\rho(x, G)$ обозначено расстояние от точки x до множества G в фазовом пространстве.

Оказывается, что решение вопроса об асимптотической орбитальной устойчивости сводится к выяснению того, какие действительные части имеют собственные числа постоянной матрицы C оператора, переводящего начальные векторы решений линеаризованной системы на период вперед. Объясним это более подробно.

Обозначим

$$A(t) = \left(\frac{\partial f_i(\varphi(t))}{\partial x_j} \right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Очевидно, $A(t + \tau) = A(t)$.

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\dot{y} = A(t)y\,. \tag{5}$$

Если $\Phi(t)$ – фундаментальная система решений (5) с $\Phi(0) = I$ (единичной матрице), то $\Phi(t + \tau)$ также является фундаментальной системой решений, и выполнено

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t)\, C,$$

где C – некоторая постоянная матрица. В частности, $\Phi(\tau) = C$, $\Phi(2\tau) = C^2$ и т.д.

Нетрудно видеть, что одно из собственных чисел матрицы C равно 1. Действительно, $\dot{\varphi}(t)$ является периодическим решением системы (5) с периодом τ. Тогда

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(\tau) = C\dot{\varphi}(0), \tag{6}$$

ибо $\dot{\varphi}(\tau) = \Phi(\tau)\dot{\varphi}(0) = IC\dot{\varphi}(0)$.

Из (6) следует, что матрица C имеет собственное число $\lambda = 1$.

Предположим, что кратность корня $\lambda = 1$ равна 1. Если остальные $(n - 1)$ корней матрицы C по модулю меньше 1, то решение $\varphi(t)$ асимптотически орбитально устойчиво и устойчиво по Ляпунову (теорема Андронова-Витта).

Этот результат аналогичен случаю линейной системы с постоянными коэффициентами, если под «собственными числами» периодической матрицы $A(t)$ понимать собственные числа матрицы C.

В качестве иллюстрации рассмотрим систему 2-го порядка:

$$\dot{x} = f(x_1, x_2), \tag{7}$$

где $x = \varphi(t)$ имеет период τ.

Тогда

$$\dot{y}_i = \frac{\partial f_i(\varphi(t))}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_i(\varphi(t))}{\partial x_2} y_2, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае второе собственное число матрицы C оказывается равным

$$\lambda_2 = \exp\{\int_0^\tau (\frac{\partial f_1(\varphi(t))}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\varphi(t))}{\partial x_2})dt\}. \tag{8}$$

Таким образом, если

$$\int_0^\tau (\frac{\partial f_1(\varphi(t))}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\varphi(t))}{\partial x_2})dt < 0,$$

то периодическое решение $\varphi(t)$ системы (7) орбитально асимптотически устойчиво, а также устойчиво по Ляпунову.

Задача 2. Проверить орбитальную асимптотическую устойчивость периодического решения $x_1(t) = \cos 3t$, $x_2(t) = \sin 3t$ в системе:

$$\dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 - x_2^3.$$

Решение.

Период решения $\tau = \frac{2\pi}{3}$.

Вычислим λ_2, пользуясь (8):

$$\lambda_2 = \exp\{ \int_0^{2\pi/3} (1 - 3\cos^2 3t - \sin^2 3t + 1 - \cos^2 3t - 3\sin^2 3t) dt\} =$$

$$= \exp\{ \int_0^{2\pi/3} (-2) dt\} = e^{-\frac{4\pi}{3}} < 1.$$

Таким образом, $|\lambda_2| < 1$, следовательно, решение $x(t)$ – орбитально асимптотически устойчиво. ■

З а д а ч а 3 . Проверить орбитальную асимптотическую устойчивость и устойчивость по Ляпунову решения $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$ в системе:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Р е ш е н и е .

Определим фундаментальную систему решений рассматриваемой системы. Ее характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Тогда $\lambda_{1,2} = \pm i$, $h_1 = (1, i)'$. Решение, соответствующее корню $\lambda = i$

$$x_1(t) = e^{it}, \qquad x_2(t) = ie^{it}.$$

Выделим его действительную и мнимую часть

$$\operatorname{Re} x_1(t) = \cos t, \qquad \operatorname{Im} x_1(t) = \sin t,$$

$$\operatorname{Re} x_2(t) = -\sin t, \quad \operatorname{Im} x_2(t) = \cos t.$$

Тогда фундаментальная система решений

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \ \Phi(0) = I.$$

Период решений $\tau = 2\pi$, так как $\Phi(t + 2\pi) = \Phi(t)$. Следовательно, $C = E$, то есть критерий асимптотической орбитальной устойчивости не выполняется.

Тем не менее, данное решение является устойчивым по Ляпунову, так как расстояние до $x(t) \equiv 0$ остается постоянным:

$$\dot{\overline{x}}_1\overline{x}_1 + \dot{\overline{x}}_2\overline{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 = \text{const.} \ \blacksquare$$

Упражнения

1. При каких значениях параметров a, b решение $x(t) = y(t) = z(t) = u(t) = 0$ системы

a) $$\frac{dx}{dt} = e^x \sin y + x^2 y;$$
$$\frac{dy}{dt} = e^{-\frac{x}{4}} + \frac{z}{4}e^y - \cos u + z^2 u;$$
$$\frac{dz}{dt} = -e^{-y} + e^{4u} + (\sin u)^2 x;$$
$$\frac{du}{dt} = -e^z + e^{-(au+by)} + xz^2$$

b) $$\frac{dx}{dt} = x^2 + \sin y - xz^3 + u\sin(6u);$$
$$\frac{dy}{dt} = xy + e^z - e^u + u;$$
$$\frac{dz}{dt} = xze^y + \operatorname{tg} u;$$
$$\frac{du}{dt} = e^{-4x} - \sin(by) - \operatorname{tg}(5z) - e^{au}$$

будет асимптотически устойчиво по Ляпунову ?

2. При каких значениях параметров u, v периодическое решение $x_1(t) = \cos 3t$, $x_2(t) = \sin 3t$, $x_3(t) = x_4(t) = x_5(t) = x_6(t) = 0$ системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2;$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3;$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -1 + e^{x_4} + x_5\sin(2x_3) + x_1x_6^2;$$
$$\frac{dx_4}{dt} = x_2x_3x_4 + x_5e^{x_6};$$
$$\frac{dx_5}{dt} = e^{x_4}\sin x_6 + x_1x_3x_5^2;$$
$$\frac{dx_6}{dt} = e^{-3x_3 - vx_4} - e^{4x_5 + ux_6} + x_3x_6^2e^{x_1^2 + x_2^2}$$

будет орбитально асимптотически устойчивым ?

Список литературы

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во МГУ, 1998.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979.
5. Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equation. – N.Y., Toronto, London, 1955.

Тема 2. Выпуклое и нелинейное программирование

1. Выпуклые многогранные множества

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$, образованное пересечением конечного числа замкнутых полупространств и гиперплоскостей, называется *многогранным множеством*:

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A^i, x) \le b_i, & i = 1, \ldots, s \\ (A^i, x) = b_i, & i = s+1, \ldots, t \end{cases} \tag{1}$$

Ограничение с номером i называется *жестким* на множестве M, если любая точка из M удовлетворяет ему как точному равенству:

$$(A^i, x) = b_i, \quad \forall\, x \in M.$$

Пример 1. Пусть множество M задано следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ -2x_1 - 3x_2 \le -5 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

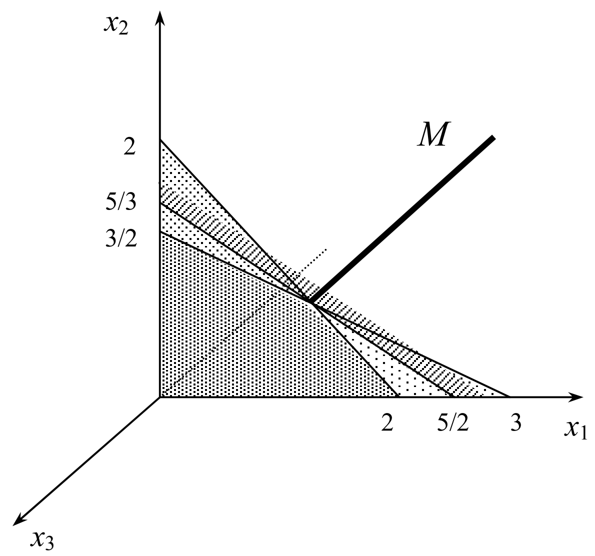


Рис. 3.

При этом первые три ограничения являются жесткими, а четвертое – нежестким (рис. 3).

Размерность многогранного множества M определяется формулой

$$\rho = n - \sigma, \tag{2}$$

где σ – ранг системы жестких ограничений M.

В нашем примере размерность множества M равна $3 - 2 = 1$.

З а д а ч а 1 . Доказать, что размерность многогранного множества

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \ldots, m, x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \right\},$$

где система ограничений равенств линейно-независима, т.е.

$$\operatorname{rank} \{a_{i1}, \ldots, a_{in}\}_{i=1}^{m} = m,$$

не превышает $(n - m)$.

Р е ш е н и е . Так как система жестких ограничений кроме равенств может включать и некоторые из неравенств $x_j \geq 0$, то ее ранг, вообще говоря, больше m. Тогда из (2) размерность M: $\rho \leq n - m$. ■

Гранью многогранного множества M называется выпуклое подмножество $G \subset M$, такое, что $\forall x \in G$: $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$, $x^1, x^2 \in M$, следует, что $x^1, x^2 \in G$.

Грань размерности 0 называется *вершиной*, грань размерности 1 – *ребром*. Любая грань многогранного множества образуется обращением некоторых неравенств в системе (1) в равенства. Число линейно-независимых жестких ограничений q-мерной грани равно $(n - q)$.

В частности, точка $x \in M$ является вершиной M, если и только если среди условий (1) имеются ровно n линейно-независимых ограничений, которым эта точка удовлетворяет как равенствам.

Очевидно, что у любого многогранного множества число вершин конечно. Это следует из того, что при любом конечном t система ограничений (1) содержит конечное число систем линейно-независимых уравнений размерности n, определяющих вершины.

З а д а ч а 2 . Доказать, что если множество M из задачи 1 непусто, то оно содержит вершины.

Р е ш е н и е . Докажем данное утверждение индукцией по размерности пространства n. При $n = 1$ оно очевидно (в силу того, что множество M замкнуто и ограничено снизу неравенством $x \geq 0$).

Предположим, что оно выполнено при всех $n \leq k$. Докажем, что оно выполнено также и при $n = k + 1$.

Если M состоит из одной точки x, то она является вершиной. Предположим, что M содержит по крайней мере две точки x и y. Тогда $\forall r \in \mathbb{R}$ точка

$$z = rx + (1 - r)y \tag{3}$$

удовлетворяет системе неравенств (1). Но тогда множество M будет содержать точки на границе ортанта $\mathbb{R}^{k+1}_{+}$. (Так как $x \neq y$, то $\exists j$: $x_j < y_j$, с точностью до переобозначения точек. Тогда, беря достаточно большое r, получим $z_j < 0$. В силу непрерывности функции (3), получаем, что $\exists\, r$: $z_j = 0$).

Рассмотрим пересечение M с координатной плоскостью $H_j = \{x\in \mathbb{R}^{k+1}, x_j = 0\}$:

$$M_{-1} = M \cap H_j.$$

M_{-1} представляет собой непустое многогранное множество в пространстве $\mathbb{R}^k = H_j$. Для него по индуктивному предположению утверждение верно, т.е. существует вершина $x^* \in M_{-1}$. Но тогда x^* является вершиной и в M, так как добавив к k линейно-независимым равенствам, определяющим вершину в $\mathbb{R}^k$, равенство $x_j = 0$, определяющее координатную плоскость H_j, получим $(k + 1)$ линейно-независимое равенство. ■

Точка x называется *крайней точкой* выпуклого множества M, если не существует точек $x', x'' \in M$: $x' \neq x''$ и числа $0 < \lambda < 1$, таких, что $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$.

Задача 3. Непустое выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^n$ имеет крайнюю точку.

Решение. Возьмем произвольную точку $x\in M$ и пусть $y\in M$ – наиболее удаленная от x точка множества M. Тогда точка y является крайней точкой сферы S радиуса $\|y - x\|$ с центром в точке x. Так как $M \subset S$, то y является также крайней точкой множества M. ■

Задача 4. Доказать, что вершина многогранного множества является его крайней точкой, и обратно, любая крайняя точка является вершиной множества.

Решение. Пусть $x \in M$ – вершина, но при этом $\exists\, y, z \in M$, такие, что

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Тогда направляющий вектор отрезка $(z - y)$ должен удовлетворять однородной системе ограничений-равенств I в точке x:

$$(A^i, z - y) = 0, \ \ i \in I; \tag{4}$$

$$(A^i, x) < b_i, \quad i \notin I. \tag{5}$$

Действительно, если x обращает в равенство некоторое ограничение-неравенство $(A^i, x) \le b_i$ и, кроме того, $(A^i, y) < b_i$, то, очевидно, $(A^i, z) > b_i$, что противоречит $z \in M$.

Тогда, в силу $y \ne z$, однородная система (4) имеет ненулевое решение, следовательно, ее ранг меньше n. Но тогда x не является вершиной множества M.

Обратно, пусть x не является вершиной. Тогда, по определению, ранг системы жестких в точке x ограничений строго меньше n. Следовательно, $\exists\ z \ne 0$, являющееся решением соответствующей однородной системы (4). Рассмотрим такое малое число $\varepsilon > 0$, чтобы точки $x' = x - \varepsilon z$ и $x'' = x + \varepsilon z$ удовлетворяли нежестким в точке x ограничениям (5). Но тогда $x = ½\ x' + ½\ x''$, то есть, не является крайней точкой M. ■

З а д а ч а 5. Найти все вершины многогранного множества $M \subset E^4$, заданного системой ограничений:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4;$$

$$0 \le x_j \le 1, \quad j = 1,\ldots, 4.$$

Р е ш е н и е. Решаем перебором, образуя из числа ограничений, задающих множество M, системы уравнений ранга $n = 4$, определяющие вершину. При этом в систему должны включаться все жесткие ограничения и часть нежестких, а полученная точка должна удовлетворять нежестким ограничениям, не вошедшим в систему, т.е. быть допустимой точкой множества M.

Положим $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Вместе с первым равенством получаем систему ранга 4, решение которой есть $x = (0, 0, 1, 1)$. Видно, что эта точка удовлетворяет всем не включенным в эту систему ограничениям, следовательно, она является вершиной.

Аналогично отыскиваются остальные вершины: (1, 0, 1, ½), (1, 0, ½, 1), (0,1, 1, ½), (0, 1, ½, 1), (1, 1, 1, 0) и (1, 1, 0, 1). ■

Упражнения

1. Доказать, что любая точка ограниченного выпуклого многогранного множества является выпуклой комбинацией его крайних точек. Показать, что эту выпуклую комбинацию можно выбрать так, что число слагаемых будет не превышать $r + 1$*,* где r – размерность выпуклого множества.
2. Найти вершины многогранного множества, задаваемого условиями:

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2,$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 2,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

3. Доказать, что у выпуклого многогранного множества существуют вершины тогда и только тогда, когда оно не содержит прямой. Прокомментировать в связи с этим теорему о представлении многогранного множества.

2. Линейное программирование

Задача линейного программирования в канонической форме имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots, m; \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots, n. \tag{3}$$

Это так называемая *прямая задача*, которая может быть интерпретирована следующим образом. Рассматривается производственная система, потребляющая m типов ресурсов и выпускающая n типов продуктов. Объем производства j-го продукта x_j, стоимость единицы j-го продукта c_j. Технология преобразования ресурсов в продукты – линейная, затраты ресурсов на единицу выпуска j-го продукта описывается вектором $a_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}$. Объем ресурса i-го типа составляет b_i. Тогда (1) – (3) представляет собой задачу нахождения оптимального выпуска $x = (x_1, \ldots, x_n)$, максимизирующего общую стоимость получаемой продукции (1).

Условия (2) представляют собой ограничения на используемые в производстве ресурсы. Равенства в условиях (2) говорят о том, что весь запас ресурсов должен быть использован в производстве.

Наконец, ограничения (3) говорят о том, что интенсивность каждого способа производства x_j должна быть неотрицательна.

Двойственная к (1) – (3) задача линейного программирования формулируется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1,\ldots, n. \tag{5}$$

Величины y_i, $i = 1, \ldots, m$ в ней можно интерпретировать как оценки используемых ресурсов. Тогда ограничения-неравенства (5) определяют оценки расходов при выпуске j-го товара, а целевой функционал (4) представляет собой оценку общих издержек. В целом задача (4) – (5) представляет собой задачу минимизации суммарных издержек.

З а д а ч а 1 . Распространить понятие двойственной задачи на случай общей задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,\ldots, m_1; \quad m_1 \leq m; \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1,\ldots, m; \tag{8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots, n_1; \quad n_1 \leq n. \tag{9}$$

Р е ш е н и е . Приведем эту задачу к каноническому виду следующим образом:

1. Введем дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = 1,\ldots, m_1$, и рассмотрим вместо (7) систему ограничений-равенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1,\dots, m_1. \tag{7'}$$

Нетрудно видеть, что вместе с условиями неотрицательности x_{n+i} она эквивалентна исходным неравенствам (7).

2. Для переменных x_j, $j = n_1+1,\dots, n$, для которых отсутствуют ограничения на неотрицательность, введем пары новых переменных x_j', x_j'', таких, что

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad x_j' \ge 0, \quad x_j'' \ge 0, \quad j = n_1+1,\dots, n.$$

После подстановки их в соотношения (6), (7') и (8) получим задачу линейного программирования в канонической форме.

Выпишем для нее двойственную задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\dots, n_1; \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j = n_1 + 1,\dots, n; \tag{12}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1,\dots, m_1. \tag{13}$$

В отличие от двойственной задаче к з.л.п. в канонической форме, в данном случае появились ограничения-равенства (12) и ограничения на неотрицательность y_i (13).

Каждое ограничение-равенство (12) соответствует двум неравенствам вида (5)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ \text{ и } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \quad j = n_1 + 1,\dots, n,$$

выписанным для переменных x_j' и x_j'', входящих в исходную задачу с одинаковыми коэффициентами, но с противоположными знаками.

Ограничение на неотрицательность y_i (13) есть ни что иное, как ограничение (5), записанное для дополнительной переменной x_{n+i}, так как в этом случае $a_{k,n+i} = 0$ $\forall k \ne i$, $a_{i,n+i} = 1$ и $c_{n+i} = 0$. ■

Задача линейного программирования *в симметричной форме*:

Прямая задача

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots, m;$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots, n.$$

Нетрудно показать, что двойственная к ней задача имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\dots, n;$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1,\dots, m.$$

Если x и y – некоторые допустимые вектора в прямой и двойственной задачах, то имеет место неравенство:

$$cx \le by.$$

Оптимальные решения x^* и y^* прямой и двойственной задач линейного программирования удовлетворяют следующим условиям.

1-я теорема двойственности. Если одна из пары прямой и двойственной задач разрешима, то другая задача также разрешима, причем на оптимальных планах прямой и двойственной задач x^* и y^* выполнено

$$cx^* = by^*. \tag{14}$$

Справедливо также обратное утверждение: если допустимые точки x^* и y^* прямой и двойственной задач таковы, что выполнено (14), то x^* и y^* – оптимальны.

Назовем пары ограничений прямой и двойственных задач: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $y_i \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$, $x_j \ge 0$ *двойственными.*

2-я теорема двойственности. Для каждой пары двойственных ограничений на оптимальных планах прямой и двойственной задач x^* и y^* выполнены условия:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = 0.$$

Задача 2. Найти все решения задачи линейного программирования

$$\max\,(3x_1 + 3x_2),$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \le 3,$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \le 1,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots, 4.$$

Решение. Выпишем двойственную задачу:

$$\min\,(3y_1 + y_2),$$
(1) $\quad y_1 + 3y_2 \ge 3,$

(2) $\quad 3y_1 + y_2 \ge 3,$

(3) $\quad 2y_1 - y_2 \ge 0,$

(4) $\quad -y_1 + 2y_2 \ge 0,$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1, 2.$$

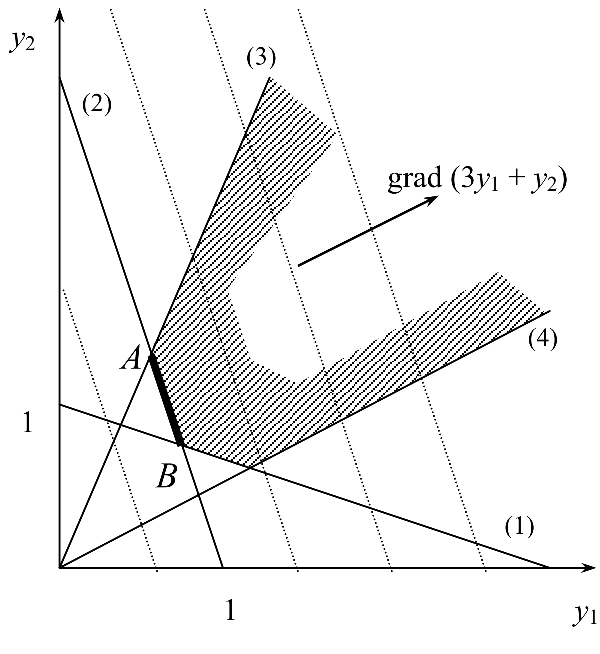


Рис. 4.

Это двумерная задача, ее можно решить графически, как показано на рис. 4.

Так как ограничение (4) двойственной задачи выполняется как строгое неравенство (т.е., оно свободное), то соответствующее ему ограничение $x_4 \geq 0$ прямой задачи в оптимуме выполнено как равенство, т.е. $x_4 = 0$ для всех оптимальных планов прямой задачи.

Далее, ограничение (1) – свободно, следовательно, $x_1 = 0$ в любом оптимуме. Ограничение (3) также свободно, следовательно, $x_3 = 0$.

Таким образом, получаем единственное решение прямой задачи $x = (0, 1, 0, 0)$. ■

З а д а ч а 3 . Решить задачу линейного программирования

$$\max (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4),$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$$
$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1,\ldots, 4.$$

Р е ш е н и е . Пара двойственных задач выглядит следующим образом

	$\max (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4)$,	$\min (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 4y_5)$,
(y_1)	$x_1 \leq 1$,	$y_1 + y_5 \geq 1$,
(y_2)	$x_2 \leq 1$,	$y_2 + y_5 \geq 2$,
(y_3)	$x_3 \leq 1$,	$y_3 + 2y_5 \geq 3$,
(y_4)	$x_4 \leq 1$,	$y_4 + 2y_5 \geq 4$,
(y_5)	$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$,	
	$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots, 4.$	$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4.$

Эти задачи удобнее решать, пользуясь следующими интуитивными соображениями: пусть переменные x_j представляют собой объемы выпуска продукции при помощи j-го технологического процесса. Условия (1) – (4) представляют собой ограничения на производственную мощность j-го процесса. Условие (5) – баланс распределения сырья на производство. Оно указывает, что из одной единицы ресурса может быть получено по 1 единице продукта x_1 или x_2 либо по ½ единицы продукта x_3 или x_4 и что всего имеется 4 единицы сырья.

Критерий представляет собой суммарную стоимость произведенной продукции при ценах $p = (1, 2, 3, 4)$.

Сравнивая коэффициенты в критерии и в ограничении (5) видим, что максимальная стоимость из 1 единицы сырья может быть произведена вторым или четвертным процессом, следовательно, они должны использоваться с максимальной интенсивностью, т.е. $x_2 = 1$, $x_4 = 1$. Это потребует 3 единицы ресурса. Оставшаяся единица ресурса может быть использована в третьем процессе, обеспечив выпуск $x_3 = ½$. Первый процесс в этом случае вообще не будет использоваться, как наименее эффективный $\Rightarrow x_1 = 0$. Таким образом, оптимальное решение данной задачи $x = (0, 1, ½, 1)$. Максимальное значение линейной формы 7½. ■

Маргинальные значения

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме (1) – (3). Пусть $V(b)$ – максимальное значение линейной формы данной задачи при заданном векторе b правых частей ограничений-равенств (2).

Определение. *Маргинальными значениями* задачи линейного программирования называются правая и левая частные производные функции $V(b)$ по элементам вектора b.

Содержательно маргинальные значения $\dfrac{\partial V(b)}{\partial b_i^-}$ и $\dfrac{\partial V(b)}{\partial b_i^+}$ показывают, на сколько изменится максимальная стоимость выпущенной продукции при малом уменьшении или увеличении доступного объема i-го ресурса.

Можно показать, что $V(b)$ является вогнутой функцией b. При этом левая и правая производные функции $V(b)$ в точке b вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial V(b)}{\partial b_i^-} = \max_{y \in Y^*(b)} y_i, \quad \frac{\partial V(b)}{\partial b_i^+} = \min_{y \in Y^*(b)} y_i$$

где $Y^*(b)$ – множество решений двойственной задачи.

Задача 4. Найти $\dfrac{\partial V(b)}{\partial b_1^-}$ и $\dfrac{\partial V(b)}{\partial b_1^+}$ в задаче 2.

Решение. В задаче 2 $b = (3, 1)$, множество $Y^*(b)$ – отрезок $[A, B]$, где точка A определяется из уравнений:

$$y_2 = 2y_1,\ 3y_1 + y_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = {}^3/_5,\ y_2 = {}^6/_5 \quad \Rightarrow \quad A = ({}^3/_5,\ {}^6/_5),$$

точка B удовлетворяет условиям

$$y_1 + 3y_2 = 3,\ 3y_1 + y_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = {}^3/_4,\ y_2 = {}^3/_4 \quad \Rightarrow \quad B = ({}^3/_4,\ {}^3/_4).$$

Тогда:

$$\frac{\partial V(b)}{\partial b_1^-} = \max_{y\in[A,B]} y_1 = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial V(b)}{\partial b_1^+} = \min_{y\in[A,B]} y_1 = \frac{3}{5}.$$

Полученные результаты показывают, что при уменьшении правой части первого ограничения в задаче 2 на ε, оптимальное значение критерия в ней уменьшится на ¾ ε, а при увеличении правой части на ε – возрастет на ${}^3/_5\varepsilon$. ■

Упражнения

1. Доказать, что если множество допустимых векторов задачи линейного программирования содержит опорные планы, то среди оптимальных планов имеются опорные.
2. Найти решение и вычислить маргинальные значения в следующей з.л.п.:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 3,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 3,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

3. Пусть $M(p) = \max(2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4)$ при ограничениях:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 \le 6,$$
$$0 \le x_j \le 1, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Вычислить левую и правую частные производные функции $M(p)$ по p_i в точке $p^0 = (2, 4, 2, 2)$.

4. Рассмотрим семейство задач линейного программирования

$$
bx_1 + 4x_2 + 8x_3 \to \max
$$

$$
s.t. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \le a \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1 \\ x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,3 \end{cases} \qquad (*)
$$

a) Найти решение задачи при $b = 4$ и при всех значениях a.

b) Пусть $g(a,b) = \max\limits_{s.t.(*)} \{bx_1 + 4x_2 + 8x_3\}$ – оптимальное значение целевой функции задачи при заданных параметрах (a, b).

Найти $\dfrac{\partial g}{\partial a^-}, \dfrac{\partial g}{\partial a^+}, \dfrac{\partial g}{\partial a}, \dfrac{\partial g}{\partial b^-}, \dfrac{\partial g}{\partial b^+}, \dfrac{\partial g}{\partial b}$ при $b = 4$ и при всех a (если соответствующие производные существуют).

3. Выпуклое программирование

Определение. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. *Эффективным множеством* функции f назовем множество

$$
\operatorname{dom} f = \{x\colon f(x) < +\infty\}.
$$

Функция $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ называется *собственной*, если $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$.

Определение. Собственная функция $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ называется *выпуклой*, если $f(x) \ne -\infty$ $\forall\, x \in \operatorname{dom} f$ и ее надграфик $\Gamma^+ = \{(t, x)\colon f(x) \le t,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n\}$ – выпуклое множество (рис. 5).

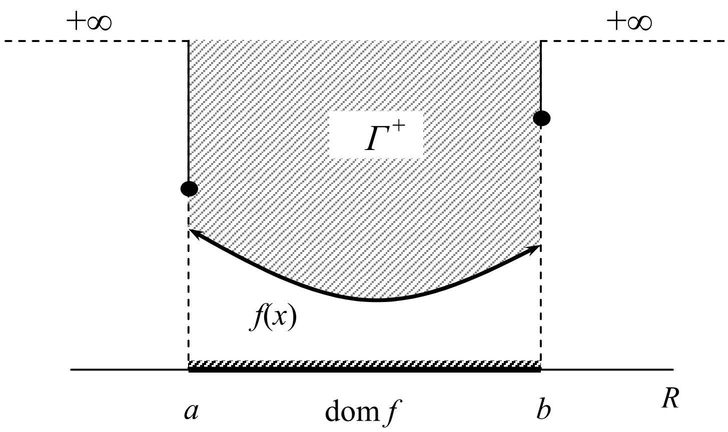


Рис. 5.

Из выпуклости множества Γ^+ следует, что собственная функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда для нее выполнено неравенство Иенсена:

$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \le \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x'') \quad \forall\, x', x'' \in \operatorname{dom} f, \quad \forall\, \alpha \in [0, 1].$$

Во внутренних точках эффективного множества $\operatorname{dom} f$ собственная выпуклая функция f непрерывна и субдифференцируема.

Субдифференциал собственной выпуклой функции в точке $x^0 \in \operatorname{dom} f$ – это множество

$$\partial f(x^0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge f(x^0) + y(x - x^0)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Элемент субдифференциала называется *субградиентом*.

Задача 1. Если $x^0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$, то $\partial f(x^0)$ – выпуклый компакт.

Решение. Выпуклость и замкнутость $\partial f(x^0)$ следуют из определения. Докажем ограниченность.

Пусть $\partial f(x^0)$ – неограниченное множество, т.е. содержит последовательность $y_1, y_2, \ldots$, т.ч. $\| y_j \| \to +\infty$ при $j \to \infty$. В силу непрерывности в точке x^0, f – ограничена сверху в окрестности $U_\varepsilon(x^0) \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f$, следовательно найдется $C \in \mathbb{R} : \forall x \in U_\varepsilon(x^0)$: $f(x) < C$.

Рассмотрим последовательность векторов $\{x_i\}$, таких, что $x_i - x^0 = \varepsilon \dfrac{y_i}{\| y_i \|}$.

Тогда

$$C > f(x_i) \ge f(x^0) + y_i\, \varepsilon \frac{y_i}{\| y_i \|} = f(x^0) + \varepsilon \| y_i \| \to +\infty \text{ при } i \to \infty.$$

Получили противоречие. ■

В граничных точках $\operatorname{dom} f$ субдифференциал неограничен или пуст. В случае, если для граничной точки $x^0\ \exists\, y \in \partial f(x^0)$, рассмотрим $(y + \lambda a)$, где a: $(a, x - x^0) \le 0\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f$. Очевидно, что $(y + \lambda a) \in \partial f(x^0)$ при любом $\lambda \ge 0$.

В точке минимума x^* выпуклой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ выполнено $0 \in \partial f(x^*)$. Действительно,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n: \quad f(x) \ge f(x^*) + 0 \cdot (x - x^0).$$

Задача 2. Показать, что для выпуклой функции, определенной на выпуклом множестве G, множества локальных и глобальных минимумов совпадают.

Р е ш е н и е . Достаточно проверить, что всякий локальный минимум является глобальным. Пусть $x^* \in G$ – локальный минимум, т.е. $f(x^*) \le f(x)$ $\forall\, x \in U_\varepsilon(x^*) \cap G$. Допустим, что $\exists\, x' \in G$: $f(x') < f(x^*)$. Обозначим $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\| x' - x^* \|}$, и рассмотрим точку

$$x_\varepsilon = x^* + \alpha(x' - x^*) \in U_\varepsilon(x^*).$$

Тогда из неравенства Иенсена:

$$f(x^*) \le f(x_\varepsilon) = f(\alpha x' + (1-\alpha)x^*) \le \alpha f(x') + (1-\alpha) f(x^*) < f(x^*).$$

Получили противоречие. ■

О п р е д е л е н и е . Производной по направлению l функции f в точке x называется величина

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{f(x + \varepsilon l) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Производная по направлению для выпуклой функции f, если она существует, может быть найдена как

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \sup_{y \in \partial f(x)} (l, y).$$

Вычисление субдифференциала

Сформулируем несколько свойств субдифференциала функции, часто используемых при его вычислении.

1. Если $f(x)$ – дифференцируема в точке x, то $\partial f(x) = \{\operatorname{grad} f(x)\}$.

2. Пусть $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, где α_1, $\alpha_2 \ge 0$, и выполнено условие регулярности: существует точка $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$, внутренняя для $\operatorname{dom} f_1$ или $\operatorname{dom} f_2$. Тогда

$$\forall\, x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2 \quad \partial f(x) = \alpha_1 \partial f_1(x) + \alpha_2 \partial f_2(x).$$

3. Пусть $f(x) = \max\limits_i \{f_i(x)\}$, где f_i – выпуклые функции. Тогда

$$\partial f(x) = \operatorname{Conv} \bigcup_{i \in R(x)} \partial f_i(x), \text{ где } R(x) = \{i : f_i(x) = f(x)\}.$$

4. Пусть $f(x) = \varphi(Ax)$, где A – матрица $m \times n$. Тогда $\partial f(x) = A' \, \partial \varphi(Ax)$.

Задача 3. Найти производные по направлению функции $f(x) = | x |$ в точке $x = 0$.

Решение. Найдем субдифференциал функции $f(x)$ в точке $x = 0$. По определению:

$$\partial f(0) = \{y \in R\colon | x | \geq xy \ \forall x \in R\},$$

откуда $\partial f(0) = [-1, 1]$ (рис. 6).

Тогда:

$$\frac{\partial f(0)}{\partial(1)} = \sup_{y \in [-1,1]} y = 1, \quad \frac{\partial f(0)}{\partial(-1)} = \sup_{y \in [-1,1]} (-1) \cdot y = 1.$$

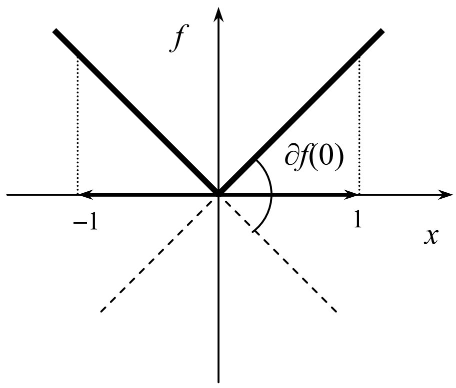


Рис. 6.

Задача 4. Найти субдифференциал функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} | a_i x - b_i |.$$

Решение. Пользуясь результатом предыдущей задачи и свойствами субдифференциала 2 и 4, получаем:

(4) $\Rightarrow \quad \partial(| a_i x - b_i |) = a_i \operatorname{sgn}(a_i x - b_i)$,

где $\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \\ [-1,1], & y = 0 \end{cases}$.

(2) $\Rightarrow \partial f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{sgn}(a_i x - b_i)$.

Например, для функции

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1|,$$

изображенной на рис. 7, получим:

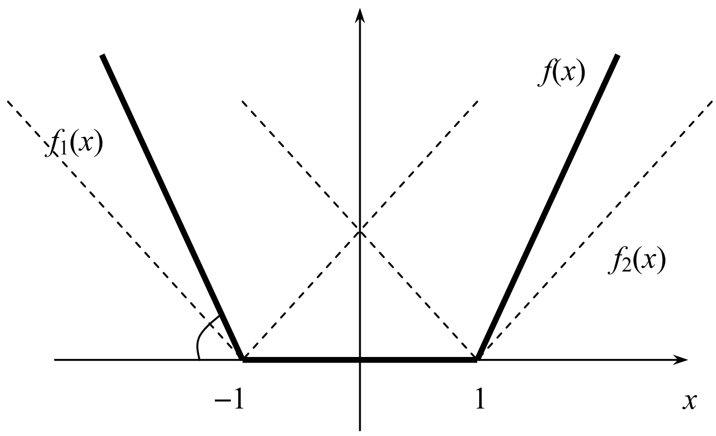


Рис. 7.

$$\partial f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ [-2, 0], & x = -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ [0, 2], & x = 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}. \blacksquare$$

З а д а ч а 5 . Найти субдифференциал функции

$$f(x) = \max\{(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2, (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2\}$$

в точке $x = (-1, 1)$ (рис. 8).

Р е ш е н и е . Воспользуемся свойством 3 субдифференциала. Построим множество $R(x)$: в точке $(-1, 1)$ максимум достигается на обеих функциях, следовательно, $R(x) = \{1, 2\}$.

Функции под знаком максимума дифференцируемы, тогда из свойства 1:

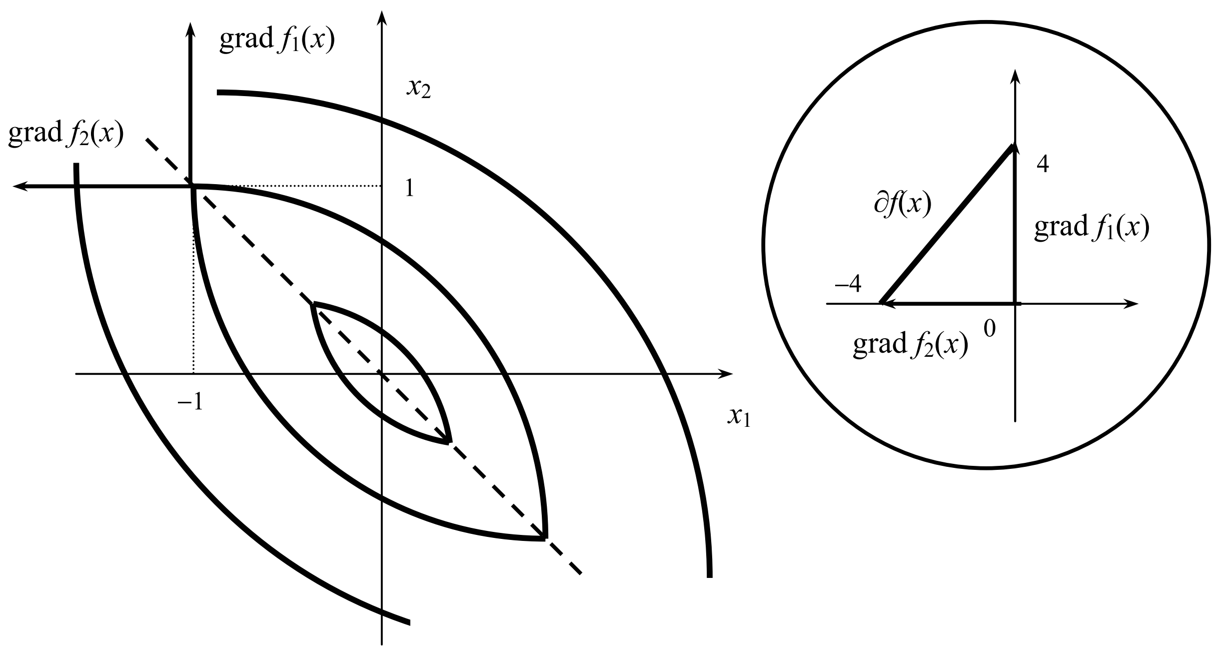


Рис. 8.

$$\partial f_1(x) = \{2(x_1 + 1, x_2 + 1)\} = \{(0, 4)\}, \quad \partial f_2(x) = \{2(x_1 - 1, x_2 - 1)\} = \{(-4, 0)\}.$$

$$(3) \Rightarrow \partial f(x) = \mathrm{Conv}\{(0, 4), (-4, 0)\}. \blacksquare$$

Задача выпуклого программирования

Пусть f, g_i, $i = 1,\ldots, m$ – выпуклые функции, заданные на выпуклом множестве $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m\}$. Задачу вида:

$$f(x) \to \min, \quad x \in R \bigcap G \tag{1}$$

будем называть *задачей выпуклого программирования*.

Замечание. К задаче выпуклого программирования сводятся также задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.

Как и в линейном программировании, для решения задачи выпуклого программирования применяются соотношения двойственности. Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = f(x) + y\, g(x), \tag{2}$$

где $y = (y_1,\ldots, y_m)$ – двойственная переменная. Образуем функции:

$$\varphi(x) = \max_{y \ge 0} L(x, y) = \begin{cases} f(x), & x \in R \bigcap G \\ +\infty, & x \in G \setminus R \end{cases},$$

$$\psi(y) = \min_{x \in G} L(x, y).$$

Тогда прямая задача выпуклого программирования может быть записана как

$$V = \min_{x \in G} \varphi(x),$$

а двойственная к ней – как

$$\tilde{V} = \max_{y \ge 0} \psi(y).$$

Если выполнено *условие Слейтера*: $\exists\, x^0 \in G$: $g_i(x^0) < 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, m$, то множества решений прямой задачи X^* и двойственной задачи Y^* – не пусты, и имеет место *соотношение двойственности*: $V = \tilde{V}$.

З а д а ч а 6. С помощью описанной схемы двойственности для задачи выпуклого программирования получить соотношение двойственности для прямой задачи ЛП в симметричной форме.

Р е ш е н и е. Задача ЛП в симметричной форме имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots, n.$$

Обозначим: $f(x) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$, $i = 1,\dots, m$, $G = \mathbb{R}_+^n$, и построим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = -cx + y(Ax - b),$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, & x \in R \\ +\infty, & x \in G \setminus R \end{cases},$$

$$\psi(y) = \min_{x \ge 0}((yA - c)x - by) = \begin{cases} -by, & yA \ge c \\ -\infty, & иначе \end{cases}.$$

Тогда двойственная задача $\tilde{V} = \max_{y \ge 0} \psi(y)$ запишется в виде:

$$-by \to \max, yA \ge c, y \ge 0,$$

а соотношение двойственности $V = \tilde{V}$ – как

$$\max\{cx \mid Ax \le b, x \ge 0\} = \min\{by \mid yA \ge c, y \ge 0\}. \ \blacksquare$$

З а д а ч а 7. Соотношение двойственности эквивалентно существованию седловой точки (x^*, y^*) функции Лагранжа:

$$f(x^*) + y\, g(x^*) \le f(x^*) + y^*\, g(x^*) \le f(x) + y^*\, g(x), \ \forall x \in G, y \ge 0.$$

Р е ш е н и е . Пусть (x^*, y^*) – седловая точка функции Лагранжа. Докажем, что в этом случае имеет место соотношение двойственности. Из правого и левого неравенства в определении седловой точки получаем, соответственно,

$$L(x^*, y^*) = \psi(y^*) = \min_{x\in G} L(x, y^*)\,,$$
$$L(x^*, y^*) = \varphi(x^*) = \max_{y\geq 0} L(x^*, y)\,,$$

Тогда

$$\min_{x\in G}\max_{y\geq 0} L(x, y) \leq \varphi(x^*) = \psi(y^*) \leq \max_{y\geq 0}\min_{x\in G} L(x, y)\,.$$

В то же время, для любой функции $L(x, y)$ имеет место обратное неравенство:

$$\max_{y\geq 0}\min_{x\in G} L(x, y) \leq \min_{x\in G}\max_{y\geq 0} L(x, y)\,,$$

следовательно, оно должно быть выполнено как равенство. Таким образом, имеет место соотношение двойственности $V = \tilde{V}$. ■

Из полученных соотношений двойственности следует, что пара (x^*, y^*) тогда и только тогда является седловой точкой, когда x^* является решением задачи $\min_{x\in G} L(x, y^*)$, и выполнены условия *допустимости* $g(x^*) \leq 0$, $y^* \geq 0$ и *дополняющей нежесткости* $y^*g(x^*) = 0$. При этом точка x^* является решением исходной задачи выпуклого программирования.

Метод решения задачи выпуклого программирования

Рассмотрим алгоритм решения задачи выпуклого программирования (1) для случая $G = \mathbb{R}^n$, основанный на направленном переборе систем активных ограничений.

Среди ограничений задачи (1) выбирается множество активных ограничений $I \subseteq \{1,\ldots, m\}$ (таких, что $g_i(x^*) = 0$ $\forall i\in I$). Тогда из условий дополняющей нежесткости, $\forall j\notin I$ $y_j = 0$.

Условия оптимальности первого порядка для функции Лагранжа (2) вместе с активными ограничениями дадут систему из $n + |I|$ уравнений с $n + |I|$ переменными (x, y_i, $i\in I$):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i\in I} y_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$g_i(x) = 0,\ i \in I.$$

Предположим, что данная система имеет решение (x, y_i, $i\in I$). Если для него выполнены условия:

a) $g_i(x) \le 0$, $i = 1, \ldots, m$,

b) $y_i \ge 0$, $i\in I$,

то точка (x^*, y^*), такая, что $x^* = x$, $y_j^* = y_j$ $\forall j\in I$, $y_j = 0$ $\forall j\notin I$ есть седловая точка функции Лагранжа, а x^* – искомое решение задачи.

Если в п. а) какое-то из ограничений нарушено, то его следует включить в новую комбинацию активных ограничений. Если в п. b) какое-то $y_j < 0$, то j-е ограничение нужно исключить из числа активных.

Действуя таким перебором, придем к комбинации активных ограничений, соответствующих множеству точек оптимума.

З а м е ч а н и е . В некоторых случаях данный алгоритм может зацикливаться, т.е. давать периодически повторяющиеся наборы активных ограничений, ни один из которых не приводит к оптимальным точкам. В этом случае рекомендуется выбрать на очередной итерации систему активных ограничений, не встречающуюся в цикле.

З а д а ч а 8 . Найти решение задачи

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\sqrt{x_1 x_2} \ge 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le {}^5/_2,$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е . В качестве активных ограничений рассмотрим $\sqrt{x_1 x_2} \ge 1$ (y_1) и $x_3 = 0$ (y_5). Тогда $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ и функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + y_1(\sqrt{x_1 x_2} - 1) + y_5 x_3 \to \max$$

Условия первого порядка для функции Лагранжа вместе с выбранными активными ограничениями дают систему:

$$\left.\begin{aligned} &-1 + \frac{y_1\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = 0 \\ &-2 + \frac{y_1\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = 0 \\ &-3 + y_5 = 0 \\ &\sqrt{x_1 x_2} = 1 \\ &x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{откуда } x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_1 = 2\sqrt{2},\ y_5 = 3.$$

Данная точка является допустимой, все множители Лагранжа в ней неотрицательны, следовательно $x = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ – искомое решение задачи. ■

З а д а ч а 9 . Найти решение задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \le M, \quad x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

где φ_i – строго вогнутые, монотонно возрастающие, непрерывно дифференцируемые функции на $[0, \infty)$, $M > 0$.

Р е ш е н и е . В данной задаче можно предложить эффективный метод подбора активных ограничений. Предположим, что переменные перенумерованы так, что

$$\varphi_1'(0) \ge \varphi_2'(0) \ge \varphi_3'(0) \ge \ldots \ge \varphi_n'(0)$$

(для простоты рассмотрим случай, когда неравенства строгие).

В силу того, что φ_i – монотонные функции, "бюджетное" ограничение $\sum_{i=1}^{n} x_i \le M$ активно. Действительно, в противном случае можно увеличить значение какой-либо из координат x_i, так что точка x останется допустимой. При этом значение критерия задачи возрастет.

Запишем функцию Лагранжа для данной задачи с учетом всех ограничений:

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) + p(M - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i ,$$

где $p \ge 0$, $\delta_i \ge 0$, $i = 1,\ldots, n$ – множители Лагранжа.

Из условий оптимальности первого порядка получаем, что в точке максимума выполнено:

$$\varphi_i'(x_i^*) = p - \delta_i, \quad \delta_i x_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = M .$$

Утверждение. Если $x_i^* = 0$, то $\forall\ k = 1,\ldots, n - i : x_{i+k}^* = 0$.

Доказательство. Допустим, что $x_i^* = 0$ и $\exists\ k > 0$: $x_{i+k}^* > 0$. Тогда $\delta_{i+k} = 0$, $\delta_i \ge 0$. Следовательно, имеем:

$$p \ge p - \delta_i = (\text{f.o.c.}) = \varphi_i'(x_i^* = 0) \ge \varphi'_{i+k}(0) > (\text{в силу строгой вогнутости}) >$$

$$> \varphi'_{i+k}(x_{i+k}^*) = p.$$

Получили противоречие.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы угадать, сколько первых координат x_i^* будут строго положительны.

Предположим, что $x_1^* = M$. Если $\varphi_1'(M) \ge \varphi_2'(0) > \ldots$, то точка $x^* = (M, 0, \ldots, 0)$ является решением. Если $\varphi_1'(M) < \varphi_2'(0)$, то нужно поделить M между первым и вторым элементами, добавляя ко второму до тех пор, пока не окажется $\varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_2)$ (а такой дележ обязательно есть, т.к. $\varphi_1'(0) \ge \varphi_2'(0) > \varphi_1'(M)$). Пусть полученные x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = M$ и $\varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_2) = \lambda$. Тогда если $\lambda \ge \varphi_3'(0) > \ldots$, то $x^* = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ – решение. Иначе нужно делить M между тремя координатами, и т.д. Этот процесс закончится при некотором $k \le n$. ■

Функция возмущения

Рассмотрим задачу вида:

$$f(x) \to \max, \quad g_i(x) \ge p_i,\ i = 1, \ldots, m, \quad x \in G,$$

где $f(x)$, $g(x)$ – вогнутые функции, $p = (p_1, \ldots, p_m)$ – параметры задачи.

Обозначим $V(p) = \max\ \{f(x) \mid g(x) \ge p,\ x \in G\}$. Очевидно, функция V не возрастает по p: $\forall\ p' \ge p''\ V(p') \le V(p'')$. Кроме того, если $f(\cdot)$ и $g_i(\cdot)$ – вогнуты, то $V(\cdot)$ также вогнута.

Свойства функции $V(\cdot)$:

1. $\psi(y) \overset{def}{=} \max\limits_{x \in G}(f(x) + yg(x)) = \max\limits_{p \in \mathbb{R}^m}(V(p) + py)$.

   Д о к а з а т е л ь с т в о . С одной стороны, $yg(x) \ge py\ \ \forall\, y \ge 0,\ \forall\, x \in G$: $g(x) \ge p$, тогда

   $$\max_{x \in G}(f(x) + yg(x)) \ge \max_{x \in G}(f(x) + yp) = \max_{x \in G}(f(x)) + py \ge V(p) + py\ \ \forall\, p,$$

   следовательно $\max\limits_{x \in G}(f(x) + yg(x)) \ge \max\limits_{p \in \mathbb{R}^m}(V(p) + yp)$

   С другой: $f(x) + yg(x) \le V(g(x)) + yg(x) \le \max\limits_{p \in \mathbb{R}^m}(V(p) + yp)\ \forall\, x$, откуда

   $\max\limits_{p \in \mathbb{R}^m}(V(p) + yp) \ge \max\limits_{x \in G}(f(x) + yg(x))$. ■

2. Если выполнено условие Слейтера, то $\partial V(0) = -\,Y^*$, где Y^* – множество решений двойственной задачи.

   Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $y^* \in Y^*$. Тогда:

   $$\psi(y^*) = \tilde{V} = V = V(0) = V(0) + y^* \cdot 0 = \max_{p \in \mathbb{R}^m}(V(p) + y^* p).$$

   Таким образом, $V(0) + y^* \cdot 0 \ge V(p) + y^* \cdot p\ \forall\, p \in \mathbb{R}^m$. Тогда

   $$V(p) - V(0) \le -\,y^*(p - 0),$$

следовательно, $(-\,y^*) \in \partial V(0)$.

   Обратно, пусть $(-\ y^*) \in \partial V(0)$ для некоторого $y^* \in E_m$. Тогда, выписывая приведенную выше цепочку в обратную сторону, получим $y^* \in Y^*$. ■

3. Производная функции возмущения по направлению:

   $$\frac{\partial V(0)}{\partial p} = \inf_{y \in \partial V(0)}(l, y) = -\sup_{y \in Y^*}(l, y).$$

Дифференцируемость функции возмущения по параметру задачи выпуклого программирования

Рассмотрим более общую параметризацию задачи выпуклого программирования:

$$V(t) = \max_{x \in R(t)} f(x, t),$$

где $R(t) = \{x : g_i(x, t) \ge 0,\ i = 1, \dots, m;\ x \in G\}$ – множество допустимых векторов, $t \in \mathbb{R}^k$ – векторный параметр задачи.

Предположим, что $f(x, t)$и $g_i(x, t) \ge 0$, $i = 1, \dots, m$ – вогнуты и конечнозначны на G при каждом t и для любого $x \in R(t)$ существуют производные функций $f(x, t)$и $g_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$ по направлению l в пространстве параметров. Предположим также, что множества решений прямой (X^*) и двойственной (Y^*) задач при $t = t_0$ непусты и ограничены. Тогда:

$$\frac{\partial V(t_0)}{\partial l} = \max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^*} \frac{\partial L(x^*, y^*, t_0)}{\partial l},$$

где $L(x, y, t) = f(x, t) + yg(x, t)$ – функция Лагранжа задачи.

З а д а ч а 1 0 . Дана задача линейного программирования:

$$V(t) = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$A(t)x \le b; \qquad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где от параметра t зависит только один элемент матрицы $A(t)$:

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} a_{i_0 j_0} + t, & i = i_0, j = j_0 \\ a_{ij}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Найти $\dfrac{\partial V(0)}{\partial t^+}$.

Р е ш е н и е . Функция Лагранжа в данной задаче имеет вид

$$L(x, y, t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{\substack{j=1,n \\ i=1,m}} a_{ij}(t) x_j y_i .$$

Тогда производная по направлению $l = +1$ при $t_0 = 0$ равна:

$$\frac{\partial V(t_0)}{\partial l} = \max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^*} (-x_{j_0}^* y_{i_0}^*) = -\max_{y \in Y^*} y_{i_0}^* \min_{x \in X^*} x_{j_0}^* . \ \blacksquare$$

Упражнения

1. Записать двойственную задачу и найти решение пары задач для следующих задач выпуклого программирования:

a) $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \to \min$,

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$

$x_2 + x_3 \leq 1$,

$x_1 \geq 0$.

b) $2 \ln x_1 + x_2 + \ln(1 + x_3) \to \max$,

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3$,

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$,

$x_2 \geq 1$.

2. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \min_{x,y} \left\{ (\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + y - 4 \;\middle|\; \begin{array}{l} s.t.\, 2x - 1 \leq \lambda, \\ \quad 2(x - y) + \lambda \leq 1, \\ \quad \lambda x^2 + \sin(\pi\lambda) \cdot y^2 + x^2 + y^2 - 2xy + \cos(\pi\lambda) \cdot y \leq 0 \end{array} \right\}.$$

a) При значении параметра $\lambda = 1$ найти решение задачи выпуклого программирования и множители Лагранжа.

b) Определить $\varphi'(1)$, $\frac{\partial x^*}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y^*}{\partial \lambda}$ при $\lambda = 1$, где x^* и y^* – решения задачи минимизации.

3. Исследовать следующие функции на выпуклость/вогнутость и найти их субдифференциал либо супердифференциал во всех точках (если они существуют). Записать решение в алгебраической форме, дать графическую иллюстрацию.

a) $f(x_1, x_2) = -\max\{x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2, 2x_2\}$;

b) $f(x) = |x_1 + 2x_2| + |x_1 - 2x_2|$.

4. Пусть M – выпуклая оболочка объединения надграфиков функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = \frac{(x-2)^2}{2}$. Описать функцию, для которой M является надграфиком.

4. Нелинейное программирование

Теперь рассмотрим задачу условной оптимизации более общего вида: найти экстремумы функции f при ограничениях:

$$f(x) \to \text{extr};$$
$$x \in M \subset \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

где множество допустимых точек M имеет вид:

$$M = \{x \mid g_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Будем предполагать, что функции f и g_i – дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой области. При этом, в отличие от рассмотренных ранее задач, мы не предполагаем никаких свойств выпуклости данных функций.

Рассмотрим функцию Лагранжа для задачи (1):

$$L = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Обозначим $I(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}$ – множество номеров активных ограничений в точке x.

О п р е д е л е н и е . Точка $x \in M$ называется *регулярной*, если градиенты активных в точке x ограничений $\{\text{grad } g_i(x) \mid i \in I(x)\}$ линейно независимы.

Т е о р е м а . (*Необходимое условие первого порядка*) Если x – регулярная точка экстремума функции f, то найдутся такие множители Лагранжа $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,m}$, что

1) точка x удовлетворяет условиям первого порядка для функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

2) выполнены условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, m;$$

3) выполнены условия на знак множителей Лагранжа: $\lambda_i \geq 0$ – для задачи на максимум, $\lambda_i \leq 0$ – для задачи на минимум.

В отличие от рассматривавшихся нами ранее задач, данные условия уже не являются достаточными. Они дают возможность выделить подозрительные на экстремум точки, а для установления того, являются ли они в действительности точками экстремума, необходимо провести дополнительное исследование при помощи условий второго порядка.

Определим *матрицу Гессе* задачи нелинейного программирования (1) как матрицу вторых производных функции Лагранжа:

$$H = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{i,j=1,\dots,n}.$$

Введем следующие обозначения:

$I^0(x) = \{ i \;\; | g_i(x) = 0, \lambda_i = 0 \}$ – множество номеров активных в точке x ограничений, таких, что соответствующий множитель Лагранжа нулевой;

$I^+(x) = \{ i \;\; | g_i(x) = 0, \;\; \lambda_i \neq 0 \}$ – множество номеров активных ограничений, соответствующих ненулевым множителям Лагранжа (положительным – для локального максимума и отрицательным – для локального минимума).

Очевидно, что $I(x) = I^0(x) \bigcup I^+(x)$.

Определение. *Касательным многообразием* к многообразию, задаваемому активными ограничениями в точке x, назовем множество

$$Z(x) = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid (\mathrm{grad}\, g_i(x), z) = 0 \;\forall\, i \in I^+(x) \text{ и } (\mathrm{grad}\, g_i(x), z) \geq 0 \;\forall\, i \in I^0(x) \}.$$

Теорема. (*Необходимые условия второго порядка*) Если регулярная точка $x \in M$ есть точка локального минимума (максимума) функции f, то для нее выполнены условия первого порядка, и, кроме того, гессиан положительно (отрицательно) полуопределен на многообразии $Z(x)$:

$$z^T H z \geq 0 \quad (z^T H z \leq 0) \quad \forall\, z \in Z(x).$$

Теорема. (*Достаточные условия второго порядка*) Если для регулярной точки x выполнены условия первого порядка, и, кроме того, гессиан строго положительно (отрицательно) определен на многообразии $Z(x)$:

$$z^T Hz > 0 \quad (z^T Hz < 0) \quad \forall\, z \in Z(x): z \neq 0,$$

то x – точка локального минимума (максимума).

Выполнение в точке x достаточных условий второго порядка говорит о том, что она является точкой экстремума. В то же время, так как необходимые и достаточные условия второго порядка не совпадают, могут возникать ситуации, когда необходимое условие второго порядка выполняется, а достаточное – нет. В этом случае об оптимальности рассматриваемой точки на основе условий второго порядка ничего сказать нельзя и требуется дополнительное исследование.

Заметим, что в случае, когда рассматриваемая точка является вершиной множества ограничений и $I^0(x) = \varnothing$, то касательное подпространство $Z(x)$ состоит только из нулевого вектора, в связи с чем условия второго порядка (необходимые и достаточные) выполняются в этой точке автоматически, если выполнено условие первого порядка.

Алгоритм решения задачи нелинейного программирования

1. Выбирается набор активных ограничений $I(x)$.
2. Для заданного набора из условий первого порядка устанавливаются точки, подозрительные на экстремум.
3. Проверяется допустимость найденных точек, т.е. выполнение для них неактивных ограничений.
4. Проверяется выполнение условий второго порядка. При этом:
- если имеет место строгая знакоопределенность матрицы H, причем она согласуется с условиями первого порядка (множители Лагранжа нужного знака), то найденная точка является точкой локального экстремума;
- если выясняется, что квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то подозрительная точка не является локальным экстремумом;
- если квадратичная форма нестрого знакоопределена, то используемый метод не дает результата; можно воспользоваться условиями второго порядка в более жесткой форме или каким-нибудь другим методом.
5. Шаги 1 – 4 выполняются для всех возможных наборов активных ограничений.

6. Если в задаче требуется дополнительно определить глобальные максимум или минимум, то это производится сравнением значений функции в найденных точках локального экстремума. При этом необходимо убедиться, что глобальные максимум и минимум достигаются на множестве M.

З а д а ч а 1 . Найти все точки экстремума в задаче нелинейного программирования:

$$f = x_1 - x_2 \to \text{extr};$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 4; \qquad \text{(I)}$$

$$x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \ge 1. \qquad \text{(II)}$$

Р е ш е н и е . Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$L = x_1 - x_2 - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) + \lambda_2(x_1^2 + (x_2 - 2)^2 - 1).$$

Продифференцируем ее по x:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2(x_2 - 2).$$

Гессиан данной задачи имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения всех точек локального экстремума будем последовательно перебирать все системы активных ограничений и для каждой из них проверять выполнение условий первого и второго порядка.

a) $I = \varnothing$. Этот случай соответствует внутренней точке экстремума. В нашей задаче целевая функция строго монотонна по x_i, поэтому внутренних точек экстремума она не имеет.

b) $I = \{\mathrm{I}\}$. В этом случае $x_1^2 + x_2^2 = 4$, $x_1^2 + (x_2 - 2)^2 > 1$. Тогда из условий дополняющей нежесткости $\lambda_2 = 0$. Условия первого порядка для функции Лагранжа запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2\lambda_1 x_1 = 0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - 2\lambda_1 x_2 = 0\,.$$

Решением данной системы уравнений является $x_1 = -x_2$, откуда, учитывая ограничение (I), получим две точки, подозрительные на экстремум:
$z_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ – точка, подозрительная на минимум, так как $\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $z_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ – точка, подозрительная на максимум ($\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$).

Обе найденные точки удовлетворяют ограничению (II), следовательно, являются допустимыми. Проверим выполнение условий второго порядка. В точке z_1 гессиан задачи равен

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Матрица H положительно определена на всем пространстве, следовательно, она будет положительно определенной и на касательном многообразии. Таким образом, точка z_1 является точкой локального минимума.

Аналогичным образом проверяется, что z_2 есть точка локального максимума.

с) $I = \{\mathrm{II}\}$. В этом случае система ограничений имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 < 4,\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1.$$

Из условий дополняющей нежесткости $\lambda_1 = 0$, тогда условия первого порядка для функции Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_2 x_1 = 0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 2\lambda_2 (x_2 - 2) = 0\,.$$

Решая данную систему и учитывая ограничение (II), получим точки:
$z_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2+\frac{1}{\sqrt{2}})$ – точка, подозрительная на максимум ($\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$) и $z_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2-\frac{1}{\sqrt{2}})$ – точка, подозрительная на минимум ($\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Точка z_3 – недопустимая, в ней нарушается ограничение (I) задачи. В точке z_4 ограничение (I) выполнено. Проверим выполнение в ней условий второго порядка:

$$H = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица H представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму, следовательно, не выполнено необходимое условие второго порядка. Поэтому точка z_4 не является точкой локального экстремума.

d) $I = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$. Оба ограничения выполнены как равенства:

$$x_1^2 + x_2^2 = 4,\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1.$$

Решениями данной системы являются две точки: $z_5 = (-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4})$ и $z_6 = (\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4})$. Найдем соответствующие им множители Лагранжа из условий первого порядка: для z_5 $\lambda_1 = -\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{60}\right) \approx -0{,}315$, $\lambda_2 = -\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{60}\right) \approx 0{,}202$, для z_6 $\lambda_1 = -\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{60}\right) \approx -0{,}185$, $\lambda_2 = -\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{60}\right) \approx -0{,}702$.

Следовательно, точка z_5 не является точкой локального экстремума, так как множители Лагранжа в ней имеют разные знаки, а точка z_6 является точкой локального минимума. При этом выполнение условий второго порядка проверять не требуется, так как данная точка является вершиной допустимого множества и отсутствует двойственное вырождение.

Таким образом, в данной задаче имеется три точки экстремума: две точки локального минимума $z_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $z_6 = (\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4})$ и одна точка локального максимума $z_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Графическая иллюстрация приведена на рис. 9. ■

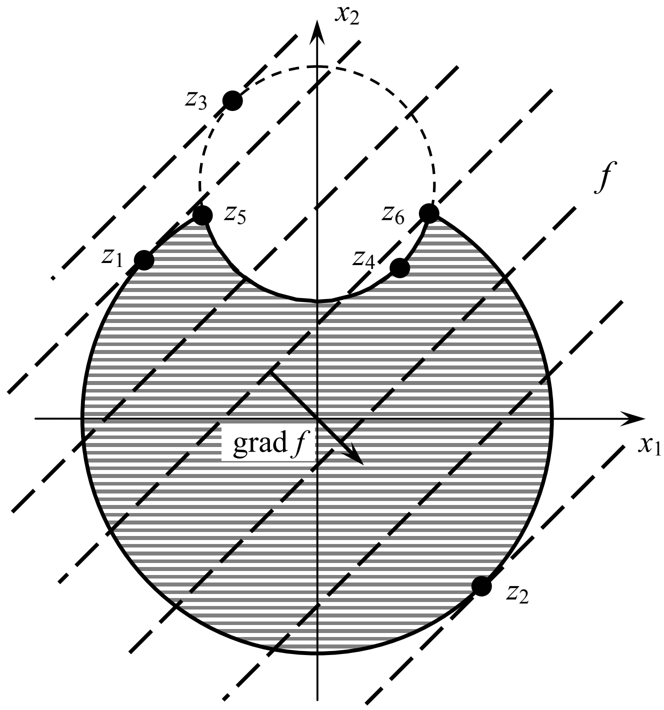


Рис. 9.

З а д а ч а 2 . Найти все точки локального экстремума в задаче нелинейного программирования:

$$f = 6x_1 - x_2^2 \to \text{extr};$$

$$e^{x_1} \le x_2 \le e^{2x_1},$$

и определить, какие из них доставляют глобальный максимум и минимум.

Р е ш е н и е . Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$L = 6x_1 - x_2^2 + \lambda_1(x_2 - e^{x_1}) - \lambda_2(x_2 - e^{2x_1}).$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6 - \lambda_1 e^{x_1} + 2\lambda_2 e^{2x_1};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2.$$

Гессиан задачи:

$$H = \begin{pmatrix} -\lambda_1 e^{x_1} + 4\lambda_2 e^{2x_1} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перебираем системы активных ограничений задачи.

а) Внутренние точки. Так как целевая функция строго монотонна по x_1, то экстремум всегда будет достигаться на границе допустимого множества, поэтому внутренних точек экстремума в задаче нет.

b) $x_2 = e^{x_1}$. Из условий дополняющей нежесткости $\lambda_2 = 0$. Условия первого порядка запишутся в виде

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6 - \lambda_1 e^{x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 = 0.$$

Решением данной системы уравнений является допустимая точка $z_1 = (\ln\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ – подозрение на локальный максимум. Гессиан задачи в точке z_1 имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица H отрицательно определена на всем пространстве, следовательно, выполнено достаточное условие локального максимума.

c) $x_2 = e^{2x_1}$. В этом случае из условий дополняющей нежесткости $\lambda_1 = 0$ и условия первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6 + 2\lambda_2 e^{2x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_2 = 0.$$

Решением данной системы является точка $z_2 = (\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, $\lambda_2 = -\sqrt{6}$ – подозрение на локальный минимум. Точка z_2 также является допустимой, проверим для нее условие второго порядка:

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица H является отрицательно определенной, следовательно, необходимые условия второго порядка не выполнены и точка z_2 не является точкой локального экстремума.

d) $x_2 = e^{x_1}$, $x_2 = e^{2x_1}$. Решение этой системы дает единственную точку $z_3 = (0, 1)$. Вычислим соответствующие ей множители Лагранжа из условий первого порядка:

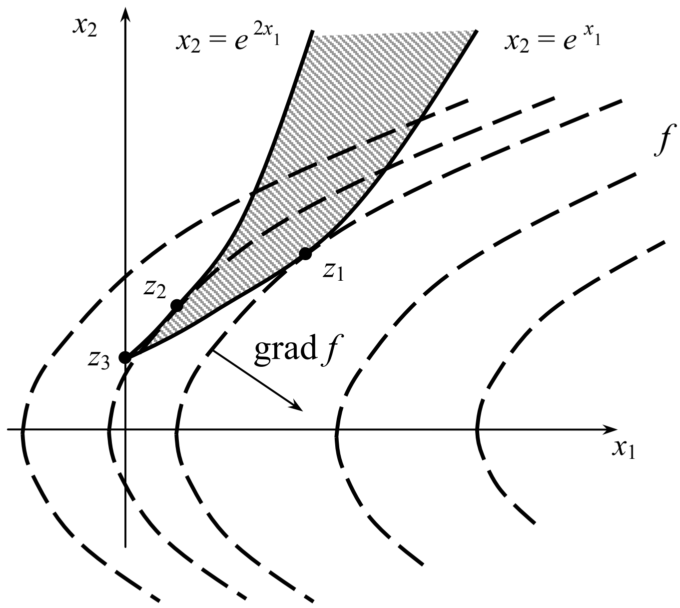


Рис. 10.

$$6 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0;$$

$$-2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Тогда $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$, следовательно, выполнено необходимое условие локального минимума. Так как точка z_3 является вершиной допустимого множества и двойственное вырождение отсутствует, то достаточные условия также выполнены.

Таким образом, в данной задаче имеется точка локального максимума $z_1 = (\ln\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и точка локального минимума $z_3 = (0, 1)$.

Функция f ограничена сверху на допустимом множестве. Так как везде на нем $0 \le x_1 < x_2$, то

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 - x_2^2 < 6x_1 - x_1^2 \le 9.$$

В то же время, на допустимом множестве функция f не ограничена снизу. Действительно, например, на границе $x_2 = e^{x_1}$

$$f = 6x_1 - e^{2x_1} \to -\infty \text{ при } x_1 \to \infty.$$

Таким образом, z_3 есть точка локального минимума, а z_1 – точка глобального максимума. ■

Функция возмущения для задачи нелинейного программирования

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(x, t) \to \text{extr}, \quad x \in M(t),$$

в которой критерий и множество допустимых точек зависят от параметра t.

Пусть $x^*(t)$ – точка экстремума в данной задаче при значении параметра t. *Функция возмущения задачи нелинейного программирования* представляет собой зависимость значения критерия в точке экстремума от параметров задачи:

$$V(t) = f(x^*(t)).$$

К сожалению, общие свойства функции возмущения в задаче нелинейного программирования сформулировать довольно затруднительно. В качестве иллюстрации приведем выражение для производной функции возмущения по параметру задачи для случая, когда $x^*(t_0)$ – строгий локальный экстремум и ему соответствует единственный набор множителей Лагранжа λ^*. Тогда производная функции возмущения равна

$$\frac{\partial V(t_0)}{\partial l} = \frac{\partial L(x^*, \lambda^*, t_0)}{\partial l},$$

где $l \in \mathbb{R}^k$ – направление в пространстве параметров, $L(x, y, t)$ – функция Лагранжа задачи.

З а д а ч а 3 . В задаче:

$$f = x_1 - x_2 \to \text{extr},$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 2a,$$
$$x_1^2 + (x_2 - a)^2 \ge 1,$$

определить, как изменятся значения критерия в точках экстремума при малом изменении параметра a в окрестности точки $a_0 = 2$.

Р е ш е н и е . При $a = a_0$ в задаче имеется 3 точки экстремума (см. задачу 1): локальные минимумы $z_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ с $\lambda = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$ и $z_6 = (\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4})$ с $\lambda = (\frac{\sqrt{15}}{60} - \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{60})$ и локальный максимум $z_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ с $\lambda = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$.

Запишем функцию Лагранжа для данной задачи при произвольном значении параметра a:

$$L = x_1 - x_2 - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2a) + \lambda_2(x_1^2 + (x_2 - a)^2 - 1).$$

Изменение значения критерия в точках экстремума z^i при малых изменениях параметра

$$\frac{\partial V_i(a_0)}{\partial a} = \frac{\partial L(z^i, \lambda^i, a_0)}{\partial a} = 2\lambda_1 + 2\lambda_2(z_2 - a)\Big|_{(z^i, \lambda^i, a_0)}.$$

Тогда, например, значение критерия в точке локального минимума z_6 при малом изменении параметра a изменится на величину

$$\frac{\partial V_6(a_0)}{\partial a} = 2\left(\frac{\sqrt{15}}{60} - \frac{1}{4}\right) + 2\left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{60}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15} - 9}{24}.$$

Упражнения

1. Решить задачу на экстремум:

a) $$2e^{x_1 - 3x_2} - x_1 \to \text{extr}$$

$$s.t. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 1 \le 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

b) $$2x_1 - x_2 \to \text{extr}$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 + 9 \ge 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 9 \le 0 \end{cases}$$

2. Дана задача нелинейного программирования

$$x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \to \max,$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le M, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2.$$

где $M > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Получить выражения для производных функции возмущения по параметрам p_j, α, M и вычислить их при $p = (1, 1)$, $M = 1$, $\alpha = ½$, $\beta = ½$.

Список литературы

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972.
3. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир, 1988.
4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
6. Фиакко А., МакКормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – М.: Мир, 1972.
7. Luenberger D.G. Introduction to Linear Programming and Nonlinear Programming. – Addison-Wesley Publ. Company, 1973.

Тема 3. Неподвижные точки и многозначные отображения

Определение. Пусть задано множество X произвольной природы и отображение f: $X \to X$. *Неподвижной точкой* отображения f называется точка $x^* \in X$, такая, что

$$f(x^*) = x^*.$$

Пример 1. Пусть множество X представляет собой единичную окружность в пространстве $\mathbb{R}^2$, а отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что f представляет собой поворот системы координат на 30^0 по часовой стрелке (рис. 11).

Из рисунка очевидно, что данное отображение не имеет неподвижной точки на множестве X: координаты всех его точек в новой системе (x_1', x_2') будут отличаться от исходных (x_1, x_2).

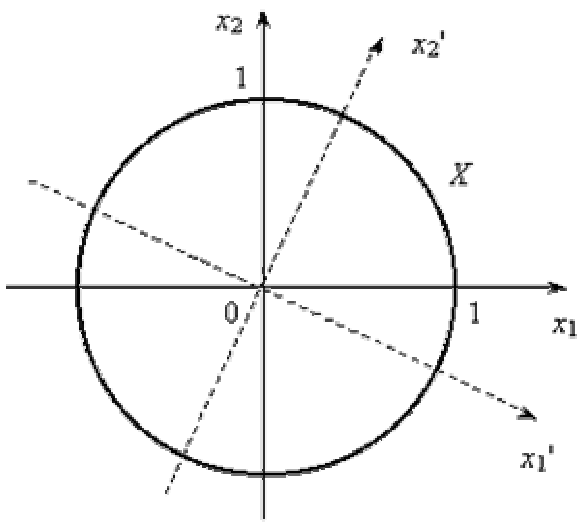


Рис. 11.

Однако если рассмотреть произвольное множество $X \subseteq \mathbb{R}^2$, содержащее точку (0, 0), то отображение f, и вообще, любое линейное отображение, будет иметь неподвижную точку. Действительно, пусть A – линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Тогда

$$\forall x \in \mathbb{R}^2: \ Ax = A(x + \mathbf{0}) = Ax + A(\mathbf{0}),$$

откуда $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, то есть (0, 0) является неподвижной точкой отображения A.

Важной проблемой является определение классов задач, в которых неподвижные точки существуют.

З а д а ч а 1 . Дано произвольное неубывающее (быть может, разрывное) отображение отрезка [0, 1] в себя. Показать, что в этом случае существует неподвижная точка.

Р е ш е н и е . Рассмотрим множество

$$A = \{x \in [0, 1] \mid x \le f(x)\}.$$

Очевидно, $0 \in A$, поэтому $A \ne \varnothing$. Рассмотрим $a = \sup A$ (рис. 12). Покажем, что a есть неподвижная точка отображения f, т.е. $f(a) = a$.

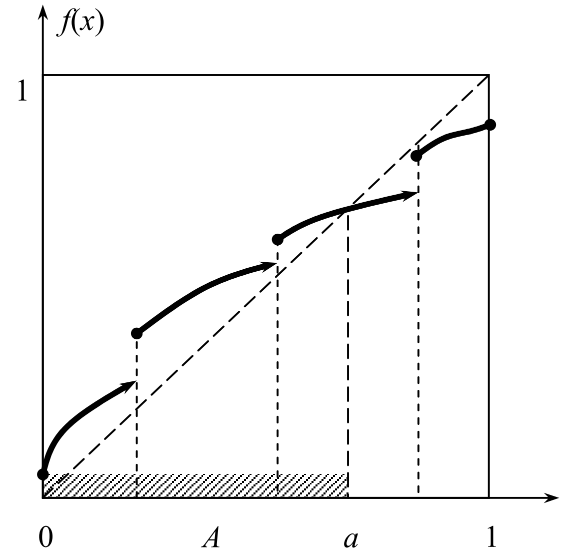


Рис. 12.

По определению $\sup A$, $\forall x \in A$: $a \ge x$. Тогда, в силу монотонности f, $f(a) \ge f(x) \ge x$ $\forall x \in A$. Следовательно, $f(a)$ – верхняя граница множества A, откуда получаем $f(a) \ge a$.

В то же время, из монотонности f: $f(f(a)) \ge f(a)$, то есть, $f(a) \in A$, откуда $a \ge f(a)$.

Из данных неравенств получаем, что $a = f(a)$. ■

Обобщением данного примера является *теорема Тарского*, устанавливающая существование неподвижных точек для одного класса задач.

О п р е д е л е н и е . *Полной решеткой* называется множество X на котором задан частичный порядок $\succeq$, такой, что

1. Существуют наименьший элемент $\mathbf{0} \in X$ и наибольший элемент $\mathbf{1} \in X$, такие, что

$$\forall\, x \in X: \ \mathbf{1} \succeq x \succeq \mathbf{0}.$$

2. Любое подмножество $A \subset X$ имеет точную верхнюю грань $\sup A \in X$.

Примерами полных решеток являются:

- множество всех подмножеств некоторого множества с отношением включения.

- n-мерный параллелепипед с лексикографическим отношением сравнения:

$$x \succ_{\text{lex}} y \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ или } \exists\, i \in \{2, \ldots, n\}: \forall j < i: \ x_j = y_j, \text{ и } x_i > y_i.$$

О п р е д е л е н и е . Отображение $f : X \to Y$ называется *монотонным*, если $\forall$ $x_1, x_2 \in X$: $x_1 \succeq_X x_2$ выполнено $f(x_1) \succeq_Y f(x_2)$, где $\succeq_X$, $\succeq_Y$ – отношения сравнения, заданные, соответственно, на множествах X и Y.

Т е о р е м а (*Тарский*). Монотонное отображение полной решетки в себя имеет неподвижную точку.

Принцип сжимающих отображений

О п р е д е л е н и е . Отображение f метрического пространства X ($X \neq \varnothing$) в себя называется *сжимающим*, если

$$\forall x, y \in X : \rho\,(f(x), f(y)) \leq K\rho\,(x, y) \text{ для некоторого } K < 1.$$

Т е о р е м а (*О сжимающем отображении*). Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку.

З а д а ч а 2 . Рассмотрим отображение $f(x_1, x_2) = (\frac{3}{5}(x_1 + x_2), \ \frac{3}{5}(x_1 - x_2))$ пространства $\mathbb{R}^2$ в себя. Является ли оно сжимающим в евклидовой метрике $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$? В метрике $\rho'(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$? Имеет ли оно неподвижную точку ?

Р е ш е н и е . Рассмотрим произвольные точки $x, y \in \mathbb{R}^2$.

$$\rho(f(x), f(y)) = \sqrt{\left(\frac{3}{5}(x_1 + x_2) - \frac{3}{5}(y_1 + y_2)\right)^2 + \left(\frac{3}{5}(x_1 - x_2) - \frac{3}{5}(y_1 - y_2)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}\big((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\big)^2 + \frac{9}{25}\big((x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)\big)^2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{5}\sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{5}\rho(x, y).$$

Полагая, например, $K = 0{,}9$, получим $\rho(f(x), f(y)) < K\,\rho(x, y)$, то есть, отображение f является сжимающим в метрике ρ.

$$\rho'(f(x), f(y)) = \max\{|\frac{3}{5}(x_1 + x_2) - \frac{3}{5}(y_1 + y_2)|, |\frac{3}{5}(x_1 - x_2) - \frac{3}{5}(y_1 - y_2)|\} =$$

$$= \frac{3}{5}\max\{|(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \le \frac{3}{5}\left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right).$$

Если последнее неравенство выполнено как равенство, и слагаемые в скобках равны друг другу, то

$$\frac{3}{5}\left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right) = \frac{6}{5}|x_1 - y_1| > |x_1 - y_1| = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \rho'(x, y).$$

Например, положим $x = (0, 0)$, $y = (1, 1)$. Тогда $f(x) = (0, 0)$, $f(y) = (\frac{6}{5}, 0)$, $\rho'(x, y) = 1$, $\rho'(f(x), f(y)) = \frac{6}{5}$. Следовательно, оператор f не является сжимающим в метрике ρ'.

Так как для пространства $\mathbb{R}^2$ с метрикой ρ выполнены все условия теоремы о сжимающем отображении, оператор f имеет неподвижную точку – это точка (0, 0). ■

Теорема Брауэра

Одним из фундаментальных результатов в теории неподвижных точек является теорема Брауэра, устанавливающая наличие неподвижных точек для широкого класса задач.

Т е о р е м а (*Брауэр*). Пусть f – непрерывное отображение непустого выпуклого компакта X в себя. Тогда оно имеет неподвижную точку.

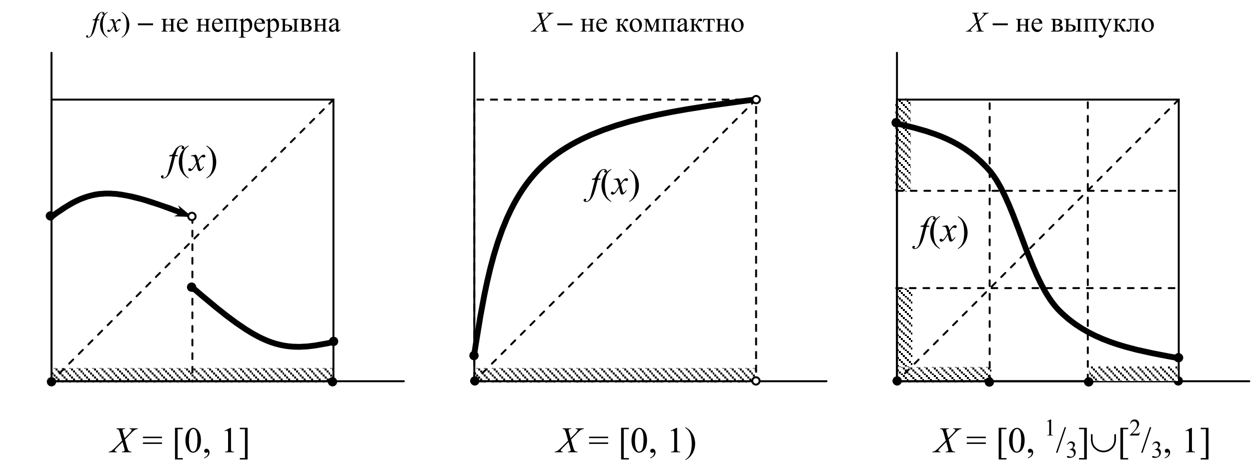


Рис. 13.

Все условия, накладываемые теоремой на отображение и множество, являются существенными. На рис. 13 приведены примеры, иллюстрирующие это.

Тем не менее, теорема Брауэра может применяться для довольно широкого класса условий, в частности, для невыпуклых множеств. Общим приемом в этом случае является построение некоторого вспомогательного отображения, удовлетворяющего условиям теоремы. Одним из распространенных типов вспомогательных отображений является *ретракция*.

Определение. Пусть X – произвольное множество, $Y \subset X$ – некоторое его подмножество. Непрерывное отображение g: $X \to Y$ называется *ретракцией* на Y, если $\forall\ y \in Y\ \ g(y) = y$.

Теорема. Пусть X – непустое ограниченное множество, $f : X \to X$. Если найдется выпуклый компакт $Y \supset X$ и отображение g – ретракция Y на X, то отображение f имеет неподвижную точку.

Задача 3. На шаре $D \subset \mathbb{R}^n$ определено непрерывное отображение f: $D \to \mathbb{R}^n$, такое, что граница множества D отображается в него: f: $\partial D \to D$. Доказать, что это отображение имеет неподвижную точку.

Решение. Модифицируем рассматриваемое отображение таким образом, чтобы можно было применить теорему Брауэра.

Для этого рассмотрим операцию проецирования на шар D: $g\colon \mathbb{R}^n \to D$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in D \\ \mathrm{Pr}_D(x), & x \notin D \end{cases} \tag{1}$$

и определим составное отображение $g \circ f : D \to D$. Данное отображение непрерывно, как суперпозиция непрерывных отображений. Кроме того, множество D является выпуклым компактом. Тогда по теореме Брауэра существует $x^* \in D$ – неподвижная точка отображения $g \circ f$:

$$g(f(x^*)) = x^*.$$

Но тогда x^* будет являться и неподвижной точкой отображения f. Действительно, если $x^* \in \operatorname{int} D$, то из условия (1) следует, что $f(x^*) \in \operatorname{int} D$, но тогда, по определению отображения g: $g(f(x^*)) = f(x^*)$.

Если $x^* \in \partial D$, то по определению отображения f: $f(x^*) \in D$. Тогда, вновь из определения g: $g(f(x^*)) = f(x^*)$.

Таким образом, установлено, что $f(x^*) = x^*$. ■

Многозначные отображения. Теорема Какутани

Определение. *Многозначным отображением* множества X в множество Y называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ некоторое (возможно, пустое) подмножество $F(x) \subseteq Y$ (обозначается $F\colon X \twoheadrightarrow Y$).

Множество $\operatorname{graph} F = \{(x, y) \mid x \in X, y \in F(x)\}$ называется *графиком* многозначного отображения F.

Задача 4. Рассмотрим экономику с двумя товарами X_1 и X_2, состоящую из одного агента, являющегося одновременно производителем и потребителем (экономика Робинзона Крузо). Товар X_1 может производиться из товара X_2 по линейной технологии, при этом для производства единицы X_1 требуется единица

X_2. Максимальная мощность по выпуску составляет 1 единицу. Всю прибыль от производства товаров получает потребитель.

Потребительское множество агента имеет вид:

$$M = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le 4,\ 0 \le x_2 \le 4,\ x_1 + 2x_2 \ge 3\}.$$

Агент максимизирует на нем функцию полезности $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, при бюджетном ограничении, соответствующем ценам товаров $(p, 1 - p)$. Начальный запас товаров составляет $A = (1, 1)$.

Построить многозначные отображения $D(p)$ и $S(p)$, описывающие, соответственно, спрос и предложение товаров в этой экономике при заданных ценах $(p, 1 - p)$, $p \in [0, 1]$.

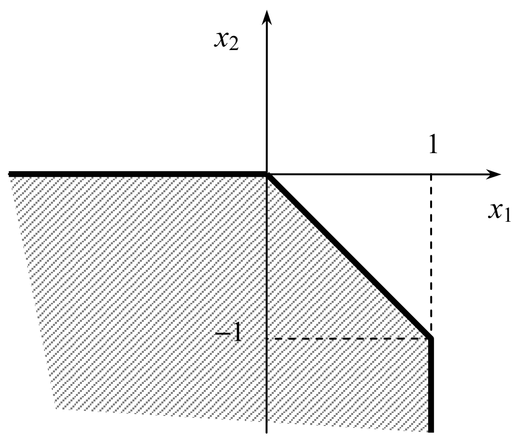


Рис. 14.

Р е ш е н и е . Построим отображение $S(p)$. Множество производственных возможностей для данной задачи имеет вид, приведенный на рис. 14 (мы нормализовали это множество, сделав стандартное предположение, что ресурсы могут свободно выбрасываться).

Производитель максимизирует на этом множестве свою прибыль при заданных ценах $(p, 1 - p)$, составляющую

$$\Pi = px_1 + (1 - p)x_2.$$

Это линейная функция, неубывающая по x_1 и x_2 при $p \in [0, 1]$. Точки максимума этой функции на множестве производственных возможностей и будут представлять собой отображение $S(p)$. Нетрудно установить, что оно будет иметь следующий вид:

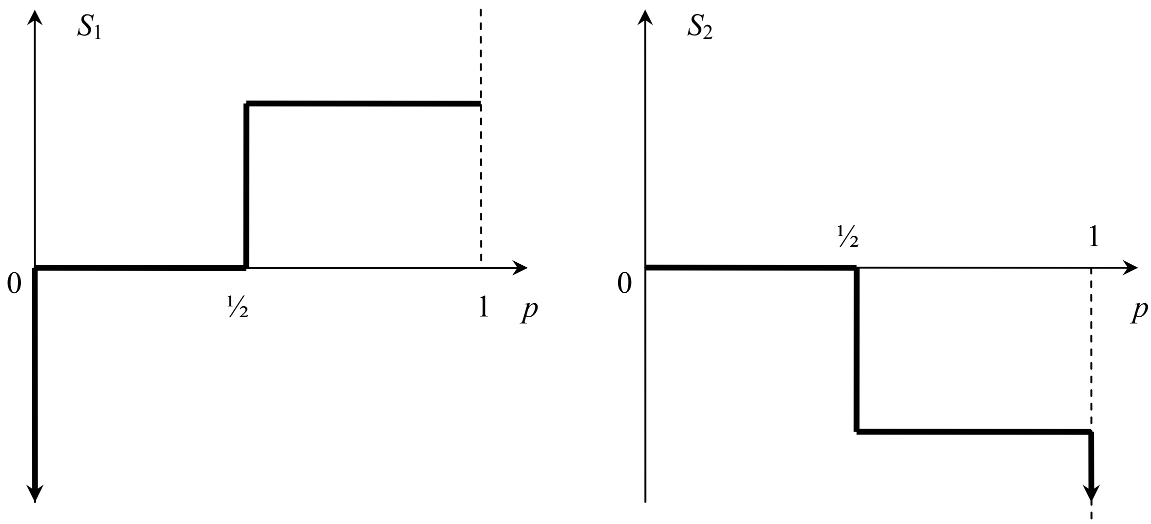


Рис. 15.

$$S(p)=\begin{cases} \{(x_1,0),\, x_1\le 0\}, & p=0\\ \{(0,0)\}, & p\in(0,\frac{1}{2})\\ \{(x_1,-x_1), 0\le x_1\le 1\}, & p=\frac{1}{2}\\ \{(1,-1)\}, & p\in(\frac{1}{2},1)\\ \{(1,x_2),\, x_2\le -1\}, & p=1 \end{cases}.$$

Вид отображения $S(p)$ приведен на рис. 15.

Теперь построим отображение $D(p)$. При заданном p потребитель максимизирует свою функцию полезности $u(x_1, x_2)$ на множестве M, а также при бюджетном ограничении, имеющем в данной задаче вид

$$p(x_1-1)+(1-p)(x_2-1)\le \Pi^*(p),$$

где $\Pi^*(p)$ – максимальная прибыль от производства при ценах p, соответствующая выпуску $S(p)$:

$$\Pi^*(p)=\begin{cases} 0, & p\in[0,\frac{1}{2}) \\ 2p-1, & p\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}.$$

Рассмотрим ситуацию $p \in [0, ½)$. Бюджетное ограничение потребителя в этом случае имеет вид

$$p(x_1-1)+(1-p)(x_2-1)\le 0.$$

В зависимости от наклона бюджетного ограничения, множество допустимых альтернатив будет иметь различный вид. Варианты этого множества, соответствующие различным p, а также наборы товаров x^*, максимизирующие на нем функцию полезности, приведены на рис. 16.

В случае, когда $p \in [½, 1]$, бюджетное ограничение потребителя запишется как

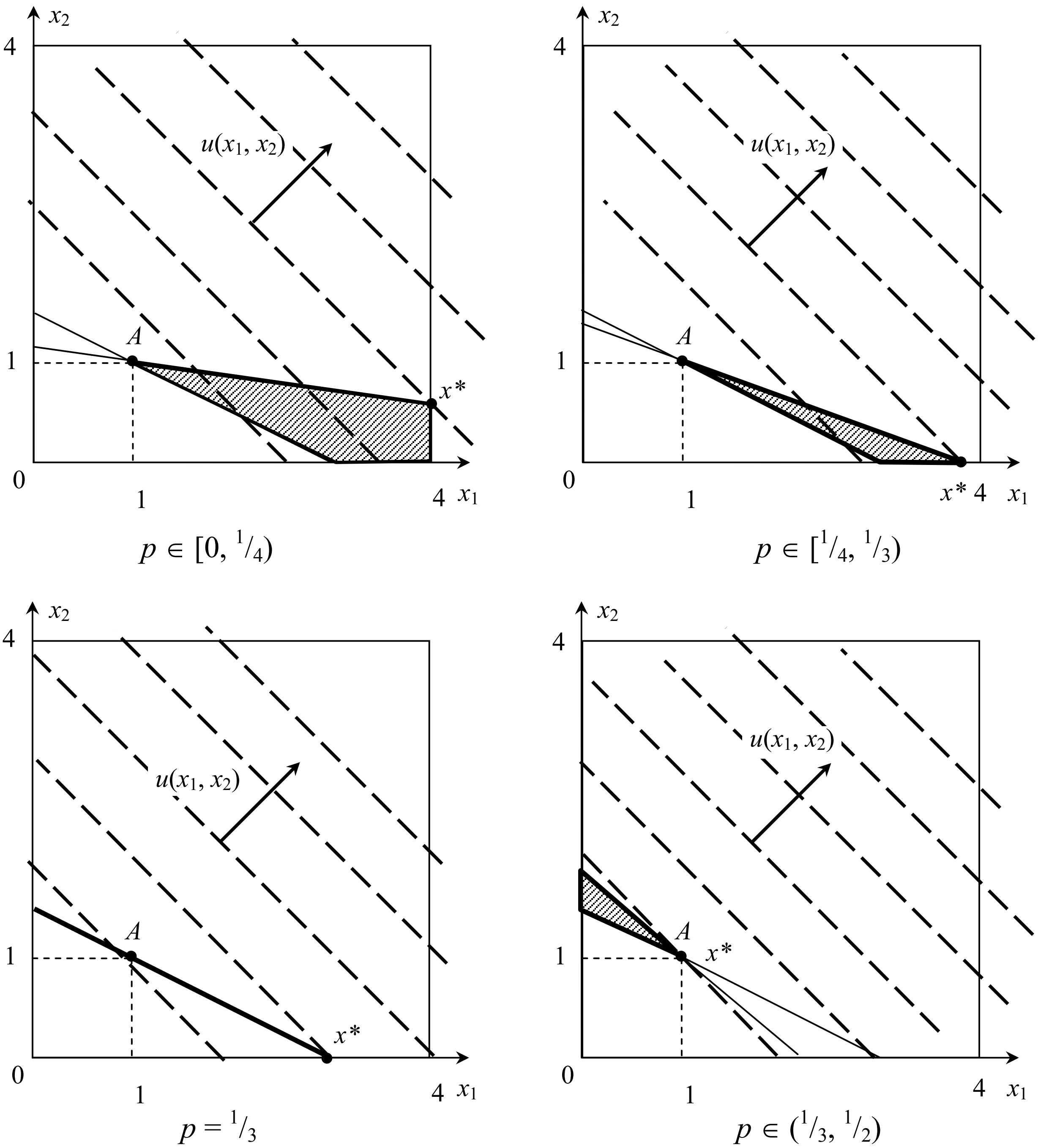
$$p(x_1-1)+(1-p)(x_2-1)\le 2p-1.$$

Или, в более удобном виде

$$p(x_1-2)+(1-p)x_2\le 0.$$

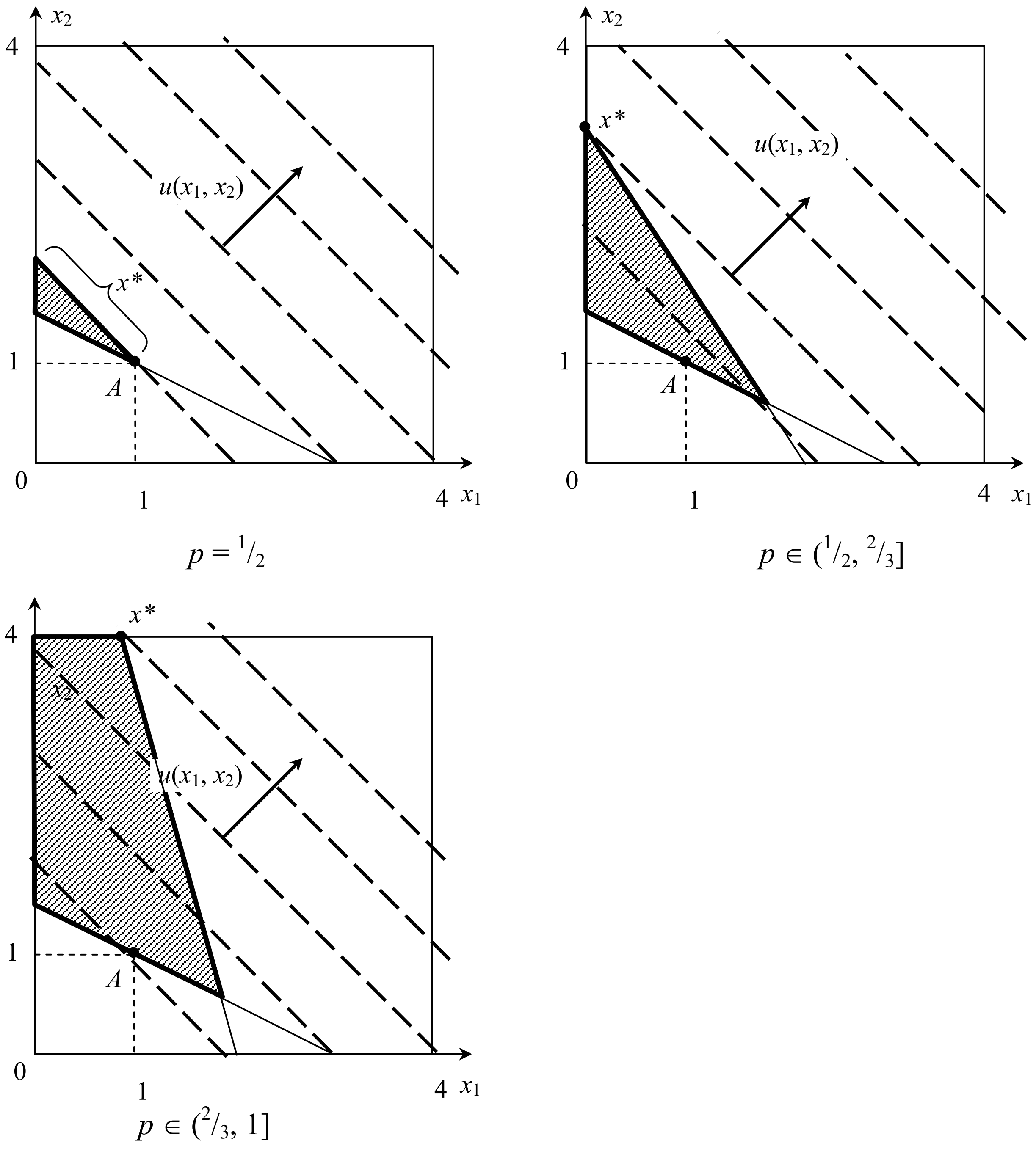
Различные варианты множества допустимых альтернатив, соответствующие ценам $p \in [½, 1]$, и оптимальные наборы приведены на рис. 17.

Отображение спроса $D(p)$ и будет представлять собой оптимальные наборы товаров x^* для каждого p, т.е.



x_2
4
$u(x_1, x_2)$
A
1
x^*
0
1
4 x_1
$p \in [0, {}^1/_4)$
x_2
4
$u(x_1, x_2)$
A
1
0
1
x^* 4 x_1
$p \in [{}^1/_4, {}^1/_3)$
x_2
4
$u(x_1, x_2)$
A
1
x^*
0
1
4 x_1
$p = {}^1/_3$
x_2
4
$u(x_1, x_2)$
A
1
x^*
0
1
4 x_1
$p \in ({}^1/_3, {}^1/_2)$

Рис. 16.



$p = {}^1/_2$

$p \in ({}^1/_2, {}^2/_3]$

$p \in ({}^2/_3, 1]$

Рис. 17.

$$D(p)=\begin{cases} (4,\dfrac{1-4p}{1-p}), & p\in[0,\dfrac{1}{4}) \\ (\dfrac{1}{p},0), & p\in[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}] \\ (1,1), & p\in(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}) \\ \{(x_1,2-x_1),0\le x_1\le 1\}, & p=\dfrac{1}{2} \\ (0,\dfrac{2p}{1-p}), & p\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}] \\ (\dfrac{6p-4}{p},4), & p\in(\dfrac{2}{3},1] \end{cases}.$$

Отметим, что наборы x^* при этом отыскиваются как решения задачи оптимизации функции $u(x_1,\ x_2)$ на соответствующем множестве допустимых альтернатив.

Вид отображения $D(p)$ представлен на рис. 18. ■

Укажем основные свойства многозначных отображений.

1. Многозначное отображение называется *замкнутым*, если его график – замкнутое множество.
2. Отображение F называется *непустозначным*, если $\forall\ x \in X : F(x) \neq \varnothing$.
3. Отображение F называется *замкнутозначным*, если $\forall\ x \in X : F(x)$ – замкнутое множество.
4. Отображение F называется *выпуклозначным*, если $\forall\ x \in X : F(x)$ – выпуклое множество.
5. Отображение F называется *полунепрерывным сверху*, если $\forall\ x \in X\ \forall\ V \supset F(x)$ существует окрестность $U \subset X$ точки x, такая, что $\forall\ y \in U : F(y) \subset$ V.

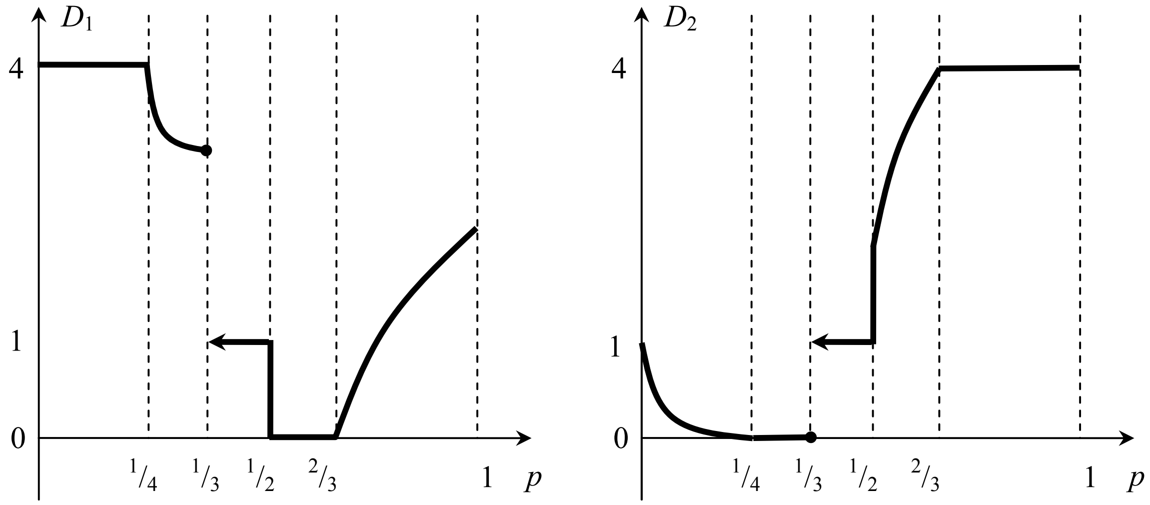


Рис. 18.

6. Отображение F называется *полунепрерывным снизу*, если $\forall\ x \in X$, для любой последовательности $\{x_k\} \to x$ и для любого $y \in F(x)$ найдется последовательность $\{y_k\} \to y$, такая, что $y_k \in F(x_k)$.

Задача 5. Показать, что замкнутозначное, полунепрерывное сверху многозначное отображение F является замкнутым.

Решение. Пусть точка $(x, y) \notin \text{graph } F$. Так как $F(x)$ – замкнуто, то существуют непересекающиеся окрестности точки y $O_1(y)$ и множества $F(x)$ $O_2(F(x))$. Из полунепрерывности сверху отображения F в точке x следует, что существует окрестность U точки x, такая, что $\forall x' \in U$ $F(x') \subseteq O_2(F(x))$. Следовательно, $(V(x) \times O_1(y)) \cap \text{graph } F = \varnothing$, что и требовалось доказать. ■

Определение. *Неподвижной точкой* многозначного отображения $F\colon X \twoheadrightarrow X$ называется точка $x^* \in X$, такая, что $x^* \in F(x^*)$.

Расширением теоремы Брауэра на случай многозначных отображений является теорема Какутани.

Т е о р е м а . Многозначное отображение F выпуклого компакта в себя, являющееся непустозначным и выпуклозначным и имеющее замкнутый график, имеет неподвижную точку.

З а д а ч а 6 . Найти неподвижные точки многозначного отображения

$$F(x, y) = \text{Arg max } \{(3x - 2y)u + (2y - 1)v \mid (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]\},$$

заданного на множестве $X = [0, 1] \times [0, 1]$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим различные случаи

1. Если $3x = 2y$, $2y = 1$, то есть, при $x = {}^1/_3$, $y = ½$, имеем $F(x, y) = X$. Тогда $({}^1/_3, ½)$ – неподвижная точка отображения F, так как $({}^1/_3, ½) \in F({}^1/_3, ½)$.
2. Если $3x > 2y$ и $2y > 1$, то максимум достигается на $u = v = 1$. Точка $(1, 1)$ удовлетворяет данным неравенствам, поэтому $(1, 1) \in F(1, 1)$.
3. Если $3x < 2y$ и $2y < 1$, то максимум достигается на $u = v = 0$. Точка $(0, 0)$ удовлетворяет данным неравенствам, поэтому $(0, 0) \in F(0, 0)$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. ■

Упражнения

1. Рассмотрим произвольное отображение f: $[0, 1] \to [0, 1]$, обладающее следующим свойством: для любого $x \in X$ существуют $f_-(x) = \lim\limits_{z \to x-} f(z)$ и $f_+(x) = \lim\limits_{z \to x+} f(z)$ и выполнено $f_-(x) \le f(x) \le f_+(x)$. Доказать, что отображение $f(x)$ имеет неподвижную точку.
2. Доказать теорему Какутани для многозначного отображения отрезка $[0, 1]$ в себя.
3. Пусть выпуклозначное многозначное отображение F: $[0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]$ обладает следующим свойством: для любого $x \in [0, 1]$ найдется $y \in F(x)$ такой, что $y \in$

$F(x')$ для любого x' из некоторой окрестности U точки x. Доказать, что отображение F имеет неподвижную точку.

4. Найти все неподвижные точки многозначного отображения единичного квадрата в себя:

$$F(x, y) = \text{Arg max } \{(6y + 4x - 3)u + (y + 3x - 2)v \mid (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]\},$$

Список литературы

1. Данилов В.И. Лекции о неподвижных точках. – М.: РЭШ, 1998.
2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972.
3. Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения в экономике. – М.: Наука, 1983.
4. Border K.C. Fixed point theorems with applications to economics and game theory. – Cambridge, 1985.

Тема 4. Парето-оптимальность

Пусть имеется множество X элементов произвольной природы (альтернатив) и набор функций $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, …, $u_m(\cdot)$, определенных на X.

Определение. Говорят, что точка $x \in X$ *доминируется по Парето* точкой $y \in X$, если $\forall i = 1, \ldots, m$ выполнено $u_i(y) \geq u_i(x)$ и хотя бы одно неравенство выполнено как строгое.

Точка $x \in X$ называется *Парето-оптимальной* (*эффективной*) во множестве X, если не существует никакой точки $y \in X$, доминирующей ее по Парето.

Точка $x \in X$ называется *слабо Парето-оптимальной* (*слабоэффективной*), если не существует никакой точки $y \in X$, такой, что $\forall i = 1, \ldots, m$ $u_i(y) > u_i(x)$.

Получим необходимое условие Парето-оптимальности. Пусть X – выпукло, $u_i(\cdot)$ – вогнутые функции на X. Отобразим множество X в пространство $\mathbb{R}^m$ с помощью отображения $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_m(x))$ и рассмотрим множество $\overline{u}(X) - \mathbb{R}^m_+ = \mathbf{U}$.

Множество $\mathbf{U}$ – выпуклое. Пусть $\tilde{x}$ – слабоэффективная точка в X. Тогда

$$\mathbf{U} \bigcap \operatorname{int}(\mathbf{R}^m_+ + \overline{u}(\tilde{x})) = \varnothing .$$

Следовательно, существует разделяющая гиперплоскость с направляющим вектором $\overline{\lambda} \geq 0$, не тождественно равным нулю, проходящая через точку $\overline{u}(\tilde{x})$, такая, что множество $\mathbf{U}$ находится в отрицательном полупространстве (рис. 19).

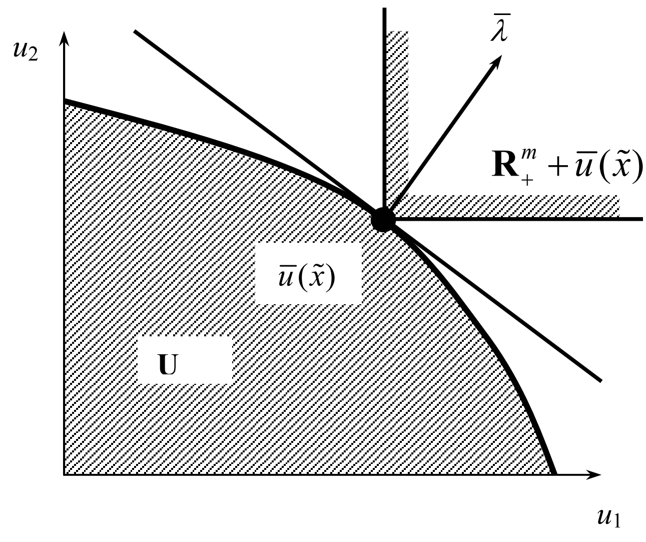


Рис. 19.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k(\tilde{x}) = \max_{x \in X} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k(x) . \quad (1)$$

Существование вектора $\overline{\lambda} \geq 0$, такого, что выполнено условие (1), есть *достаточное условие* слабой эффективности точки $\tilde{x}$.

Заметим, что $\overline{\lambda}$ не обязательно должен быть строго положительным вектором (то есть, иметь все координаты, большие нуля).

В то же время, данное условие не является достаточным для эффективности точки. Например, на рис. 20, опорная гиперплоскость к множеству **U** в точках ξ^1 и ξ^2 на рисунке имеет нормальный вектор $\overline{\lambda} = (0,1)$. Однако, лишь точка ξ^2 является эффективной, тогда как ξ^1 – слабоэффективная точка.

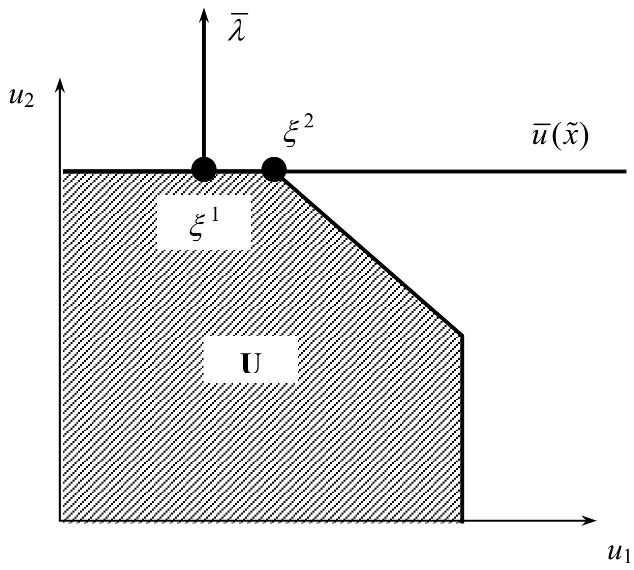


Рис. 20.

Достаточным условием эффективности точки $\tilde{x}$ является наличие вектора $\overline{\lambda} > 0$, такого, что выполнено условие (1).

З а д а ч а 1. *Модель оптимального распределения ресурсов.*

Рассматривается экономическая система, состоящая из m агентов. В системе имеется l типов товаров, начальный запас которых составляет $a = (a_1, \ldots, a_l)$. На наборах товаров $x^k = (x_1^k, \ldots, x_l^k)$ заданы функции полезности агентов $u_k(x^k)$, дифференцируемые, вогнутые и монотонно возрастающие. Необходимо определить слабоэффективные распределения имеющихся ресурсов между агентами, а также указать, какие из них будут являться эффективными.

Р е ш е н и е. Множество всевозможных распределений товаров между агентами имеет вид

$$X = \{\, x = (x^1, \ldots, x^m),\, x^k \in \mathbf{R}_+^l,\ \sum_{k=1}^{m} x^k \le a \,\}.$$

Для определения слабоэффективных распределений воспользуемся достаточным условием эффективности (1). Лагранжиан для данной задачи имеет вид

$$L(x,p)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k u_k(x^k)+p(a-\sum_{k=1}^{m}x^k).$$

где p – вектор множителей Лагранжа, соответствующих ограничениям $\sum_{k=1}^{m}x^k \le a$.

Функция L максимизируется на множестве $X' = \{x = (x^1, \ldots, x^m),\ x^k \in \mathbf{R}^l_+\}$. Условия максимума функции Лагранжа во внутренней точке множества X' имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}=\lambda_k u_k'(x^k)-p=0,$$

откуда вытекает

$$u_k'(x^k)=\frac{p}{\lambda_k} \text{ для } k\text{: } \lambda_k > 0; \quad x^k = 0 \text{ для } k\text{: } \lambda_k = 0. \qquad (2)$$

Условие (2) говорит о том, что если точка оптимума является внутренней точкой множества X', то есть все агенты в ней получают ненулевые количества каждого из товаров, то градиенты всех функций полезности $u_k'(x^k)$ в нем коллинеарны.

Неизвестные величины x^k и p могут быть найдены из условий (2) и ограничения $\sum_{k=1}^{m}x^k = a$.

Внутренние точки множества X', удовлетворяющие условиям (2), являются эффективными. Действительно, в этом случае все компоненты вектора λ должны быть строго положительны, то есть, соответствующее распределение x удовлетворяет достаточному условию эффективности. Точки, принадлежащие границе множества X', должны исследоваться отдельно по определению. ■

Задача 2. Рассмотрим систему с 2 агентами и 2 товарами x и y. Функции полезности агентов имеют вид

$$u_1(x, y) = x + \ln y,$$

$$u_2(x, y) = \ln x + y.$$

Начальные запасы товаров составляют $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Определить контрактную кривую в данной системе.

Р е ш е н и е . Согласно (2) внутренние эффективные точки должны удовлетворять условиям

$$u'_1(x_1, y_1) = \lambda\, u'_2(x_2, y_2), \quad x_1 + x_2 = \bar{x}, \quad y_1 + y_2 = \bar{y}, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$(1, \frac{1}{y_1}) = \lambda\, (\frac{1}{\bar{x} - x_1}, 1) \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{\bar{x} - x_1}.$$

Это уравнение задает кривую **Ф** на множестве распределений товаров (рис. 21). Точки данной кривой, являющиеся внутренними точками множества распределений, являются Парето-оптимальными согласно достаточному условию.

Рассмотрим теперь граничные точки множества распределений на предмет оптимальности по Парето.

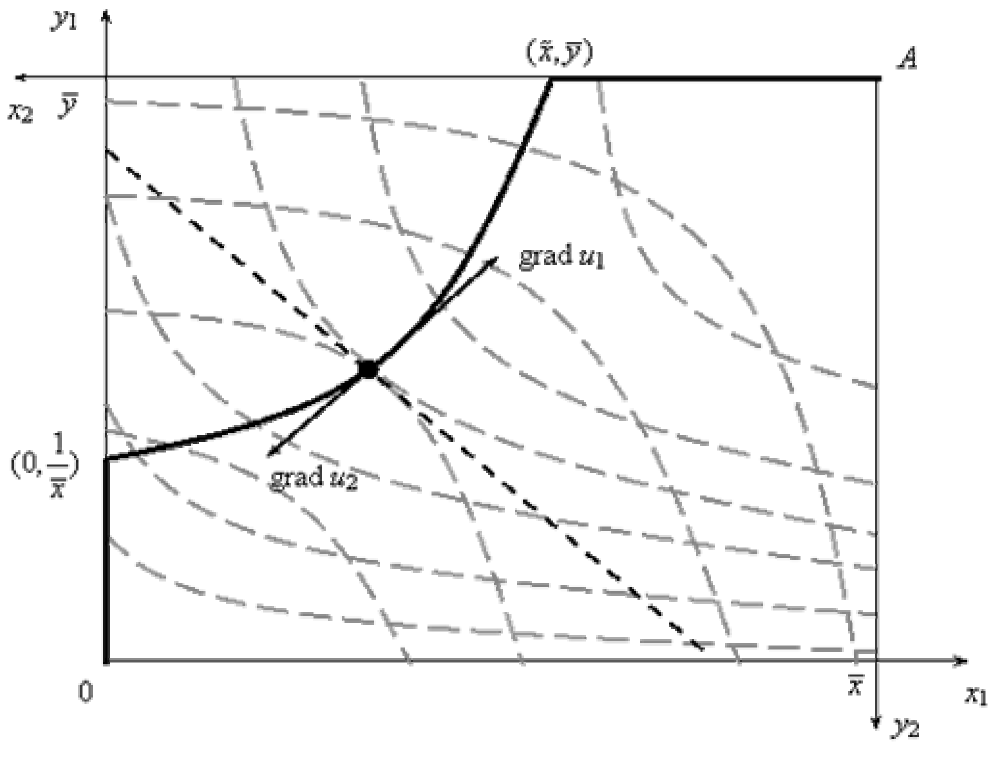


Рис. 21.

Рассмотрим точки участка границы $y_1 = \bar{y}$. Зададим приращение (Δx, Δy) в любой точке границы (x, $\bar{y}$), не выводящее за пределы множества допустимых распределений ($\Delta y \le 0$) и такое, что полезность первого агента в новой точке не уменьшается:

$$u_1(x + \Delta x,\ \bar{y} + \Delta y) \ge u_1(x,\ \bar{y}).$$

Раскладывая u_1 в ряд Тейлора в точке ($x + \Delta x$, $\bar{y} + \Delta y$) и пользуясь данным соотношением, при небольших приращениях получим

$$\Delta u_1 \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x,\bar{y})\Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}(x,\bar{y})\Delta y > 0,$$

откуда

$$\Delta x + \frac{1}{\bar{y}}\Delta y > 0.$$

Изменение полезности второго участника Δu_2 в этом случае запишется как

$$\Delta u_2 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\bar{x}-x,0)(-\Delta x) + \frac{\partial u_2}{\partial y_2}(\bar{x}-x,0)(-\Delta y) = -\frac{1}{\bar{x}-x}\Delta x - \Delta y <$$

$$< -\frac{1}{\bar{x}-x}\Delta x + \bar{y}\Delta x = (\bar{y} - \frac{1}{\bar{x}-x})\Delta x.$$

Эта величина неположительна только в том случае, когда

$$x \ge \bar{x} - \frac{1}{\bar{y}} = \tilde{x}.$$

Таким образом, для всех точек, лежащих на границе $y_1 = \bar{y}$ правее точки ($\tilde{x}$, $\bar{y}$), любое допустимое перераспределение, увеличивающее полезность агента 1, приводит к уменьшению полезности агента 2, то есть, данные точки являются эффективными.

Рассмотрим далее участок границы $x_1 = 0$. Вновь зададим приращение допустимое запасов товаров у первого агента (Δx, Δy), увеличивающее его полезность. Тогда приращение полезности 2 агента составит

$$\Delta u_2 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\bar{x},y)(-\Delta x) + \frac{\partial u_2}{\partial y_2}(\bar{x},y)(-\Delta y) = -\frac{1}{\bar{x}}\Delta x - \Delta y < (y - \frac{1}{\bar{x}})\Delta x.$$

В силу того, что приращение допустимое, $\Delta x \geq 0$. Тогда приращение полезности агента 2 будет неположительным, если $y \leq \frac{1}{\overline{x}}$. Следовательно, точки, лежащие на данном участке границы, будут эффективными только при выполнении данного условия.

Для участков границы $x_1 = \overline{x}$ и $y_1 = 0$, рассуждая аналогичным образом, можно установить, что эффективные точки на них отсутствуют. Таким образом, множество Парето-оптимальных распределений ресурсов будет состоять из трех участков: отрезка $[(0, 0) – (0, \frac{1}{\overline{x}})]$, внутренних точек, лежащих на кривой **Ф** и отрезка $[(\tilde{x}, \overline{y}) – (\overline{x}, \overline{y})]$. Иллюстрация приведена на рис. 21. ■

З а д а ч а 3 . Рассматривается система с 2 агентами и 3 товарами x, y и z. Функции полезности агентов имеют вид

$u_1(x, y, z) = \min\{x, y, z\}$,

$u_2(x, y, z) = x\, y\, z$.

Начальный запас товаров составляет (2, 2, 1).

Определить контрактную кривую в данной системе.

Р е ш е н и е . Во внутренних точках коллинеарность градиентов функций полезности агентов имеет место только на биссектрисе положительного ортанта (в том смысле, что существует субградиент функции u_1 $y = (c, c, c)$, равный градиенту функции u_2).

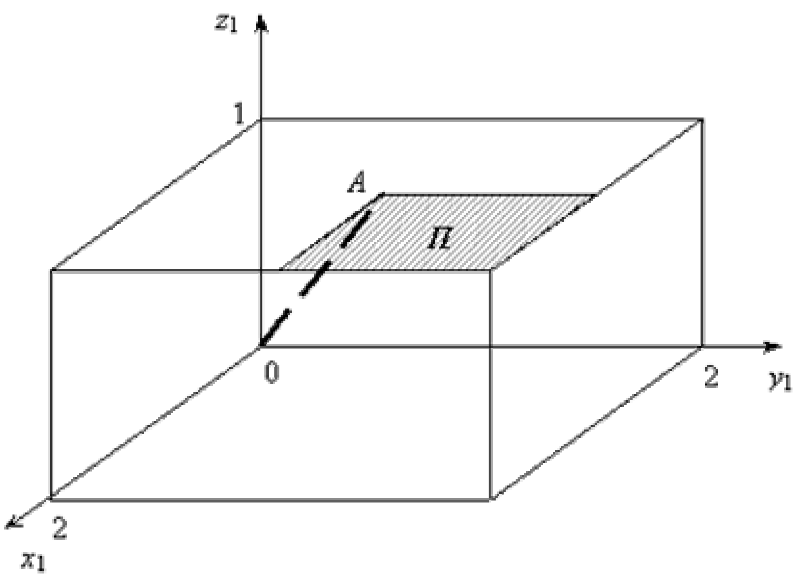


Рис. 22.

Эффективные граничные точки лежат во множестве ***П*** (рис. 22). Действительно, ***П*** представляет собой часть поверхности $u_1(x, y, z) = 1$, поэтому приращение, не уменьшающее полезность агента 1, должно оставлять точку во множестве ***П***. Но в любой точке этого множества $u_2(x, y, z) = 0$, то есть, не существует точек, в которых полезности обоих агентов не меньше и одна – строго больше. ■

З а д а ч а 4. Рассматривается система с 2 агентами и 2 товарами x и y. Функции полезности агентов имеют вид:

$$u_1(x, y) = y_1, \qquad u_2(x, y) = x_2 + y_2.$$

Определить множества эффективных и слабоэффективных точек в данной задаче, если начальный запас товаров составляет $(\bar{x}, \bar{y})$.

Р е ш е н и е. Градиенты рассматриваемых функций полезности неколлинеарны, следовательно, внутренних эффективных точек в данной задаче нет.

Исследуем точки, лежащие на границе множества допустимых распределений. Рассмотрим множества уровня функций полезности u_i: $A_i(x, y) = \{(v, w): u_i(v, w) \geq u_i(x, y)\}$.

Точка (x^*, y^*) является оптимальной по Парето, если $\bigcap_{i\in N} A_i(x^*, y^*) \in \{(x^*, y^*)\}$.

Точки границы $x_1 = 0$ являются эффективными по Парето, так как увеличение функции u_1 возможно только в направлении, выводящем за пределы множества допустимых распределений. Точки

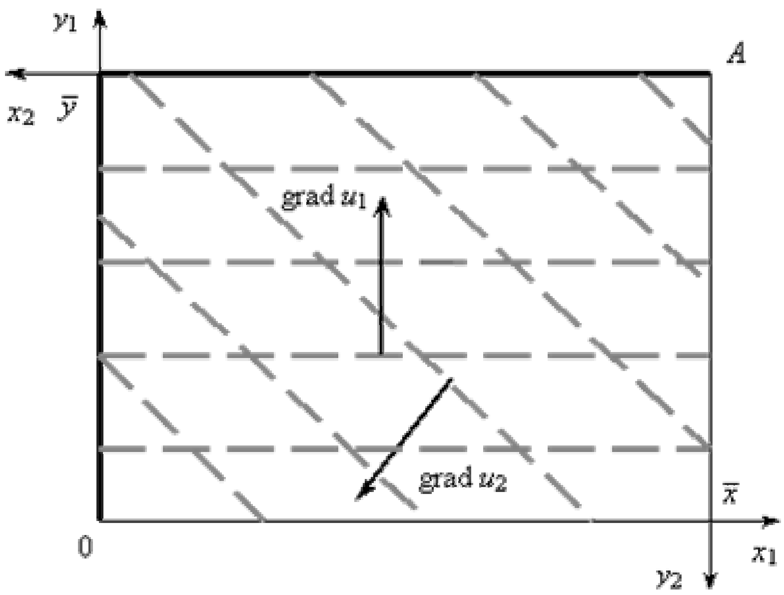


Рис. 23.

границы $y_1 = \bar{y}$, кроме точки $(0, \bar{y})$, являются слабоэффективными, так как функция u_1 в любой из этих точек может быть увеличена (рис. 23).

Точки вида $(x, 0)$, лежащие на границе $y_1 = 0$, не являются слабоэффективными, так как, например, в точке вида $(x - 2\varepsilon, \varepsilon)$, где ε выбирается из условий допустимости, оба агента получают большую полезность. Аналогично, точки, лежащие на границе $x_1 = \bar{x}$, также не являются слабоэффективными.

Таким образом, в данной задаче множества эффективных и слабоэффективных точек не совпадают. Эффективные точки лежат на границе $x_1 = 0$, тогда как слабоэффективные точки – на участках $x_1 = 0$ и $y_1 = \bar{y}$.

Упражнения

1. На неотрицательном квадранте $\mathbb{R}_+^2$ описать множество эффективных по Парето точек для двух критериев:

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 - (x_1 - a)^2,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 1 - (x_1 - b)^2 - x_2^2.$$

   Рассмотреть различные значения параметров a и b. Построить границу Парето в пространстве критериев для случая $a = b$.

2. В задаче с критериями

$$f_1 = 2x_1 + x_3,$$
$$f_2 = x_1 + 2x_2 + x_3,$$

   и множеством допустимых альтернатив $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in [0, 1], x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3\}$ определить множество эффективных. Изобразить границу Парето в пространстве критериев.

3. Между двумя субъектами нужно разделить собственность, состоящую из двух товаров в количествах, соответственно, 1 и 2 единицы. Предпочтения субъектов заданы функциями полезности

$$u_1(x_1, x_2) = 0.2 \ln x_1 + 0.8 \ln x_2,$$

$$u_2(y_1, y_2) = 0.7 \ln y_1 + 0.3 \ln y_2,$$

где (x_1, x_2) – набор товаров, получаемый первым субъектом, (y_1, y_2) – вторым субъектом.

a) Описать множество эффективных дележей.

b) Определить равновесные цены и распределение товаров для случая (конкурентного) обмена, если сначала в собственности первого субъекта имелось 0,6 единиц первого и 0,7 единиц второго товара, а в собственности второго – соответственно 0,4 и 1,3 единиц.

Список литературы

1. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986.
2. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
4. Теория выбора и принятия решений / Макаров И.М. и др. – М.: Наука, 1982.
5. Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983.